UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

La Fracción, Elemento Dialogante en el Contexto Matemático

Martha Eugenia Ordóñez Clavijo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

La Fracción, Elemento Dialogante en el Contexto Matemático

Martha Eugenia Ordóñez Clavijo
Código: 01186577

Trabajo de gradopresentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Matemático, M.Sc en Educación, Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia, Crescencio Huertas Campos.

Línea de Investigación:

Pensamiento numérico y variacional. Ubicado dentro de Historia, epistemología y didáctica.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

Al Universo

El propósito central de un trabajo dialogante debe ser el desarrollo y no simplemente el aprendizaje.

Julián De Zubiría Samper

Agradecimientos

A todos y cada uno de los profesores de la Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, quienes participaron con dedicación e incondicionalidad brindando sus conocimientos y su apoyo, sin escatimar esfuerzos, en beneficio de todos los que ingresamos a cursar dicha Maestría.

En especial, al Profesor Crescencio Huertas Campos, quien con su vasto conocimiento tanto en el campo de lo formal como de lo pedagógico, guió la realización de este trabajo.

A la Profesora Clara Helena Sánchez, quien con sus conocimientos y su incomparable calidad como docente y como ser humano despertó inquietudes y logró la motivación necesaria para no perder el norte de la labor de los docentes.

Al Profesor Reynaldo Montañez, quien con una acertada orientación en el campo de la Geometría, además de permitir el acceso a nuevos enfoques, abrió una puerta importante para continuar con su estudio y, por esta vía, aclarar las inquietudes y buscar rutas que faciliten y apoyen de manera sólida y formal la labor de los docentes.

Al Profesor Leonardo Rendón, al Profesor Iván Castro, ala profesora Martha Cecilia Moreno y al Profesor Hernán Estrada (qepd.) quienes con su mística seriedad e idoneidad pusieron, para nuestro mejoramiento académico, todo su conocimiento y su labor docente, imitable por demás.

A mi hija Ángela María Ramírez Ordóñez, Especialista en Currículo y Pedagogía de la Universidad de los Andes quien enriqueció, con sus conocimientos y experiencia en el campo de la docencia, el componente Pedagógico y Epistemológico de este trabajo.

A mis hijas Martha Patricia, Sandra Jimena y mis nietos Juan Sebastián, Germán Santiago, Juan Daniel, Andrés Julián y Oscar David por su compañía y sus invaluables aportes.

A mis compañeras y amigas Imelda Arana Sáenz, Martha Elena Figueroa Fajardo, Nidia Mercedes Jaimes Gómez, Sol Patricia Roa Reyes, Ligia Stella Rodríguez Mendoza y Martha Helena Zambrano Valentín, por creer en lo que se hace y brindar su apoyo en tiempos difíciles.

Resumen

Esta propuesta constituye un trabajo de mediación que intenta responder un clamor silencioso que se escucha vehemente en los estadios académicos.

La propuesta se enmarca en los estándares del Ministerio de Educación Nacional vigentes y se apoya en el Modelo de la Pedagogía Dialogante propuesto en Colombia por Julián De Zubiría Samper.

Se implementa el concepto a partir de la observación y de la experimentación desarrollada por los niños y niñas inmersos en la educación pública, atendiendo el objetivo general inicial:
Construir una propuesta didáctica fundamentada en el análisis disciplinar y didáctico del concepto de número racional y sus contextos de significación para los estudiantes de 3º y 4º grados de Educación Básica Primaria.

Se muestran, en las conclusiones, algunos de los resultados alcanzados.

PALABRAS CLAVES

Congruencia
Equivalencia
Fracción
Pedagogía Dialogante
Quebrado
Razón

Las siguientes, son definiciones tomadas de:
Real Academia Española
DICCIONARIO DE LA LENGUA ESPAÑOLA - Vigésima segunda edición

Congruencia
Expresión algébrica que manifiesta la igualdad de los restos de las divisiones de dos números congruentes por su módulo y que suele representarse con tres rayas horizontales (≡) puestas entre dichos números.

Equivalencia
Igualdad en el valor, estimación, potencia o eficacia de dos o más cosas o entidades

Fracción
División de una cosa en partes
Parte o porción de un todo (toma una fracción de tarta).

Pedagogía Dialogante
Feuerstein (1993) El aprendizaje mediado.
Julián De Zubiría Samper (2006) Hacia una Pedagogía Dialogante.

Quebrado
Número que expresa una o varias partes de la unidad dividida en partes iguales:

Razón
Cociente de dos números o de dos cantidades comparables entre sí (la razón de 8/2 es 4).

Abstract

This proposal is a work of mediation that attempts to answer a silent cry that you hear in stadiums passionate academics.

The proposal is part of the standards of the current Ministry of Education and is based on the model proposed dialogue Pedagogy in Colombia by Julian De Zubiria Samper.

It implements the concept from observation and experimentation developed by children involved in public education, attending the initial general objective: Build a didactic analysis based on discipline and teaching of rational number concepts and contexts of significance for students of 3^{rd} and 4^{th} grades of primary education.

Shown, the conclusions, some of the results.

KEYWORDS
Congruence
Equivalence
Fraction
Dialogical Pedagogy
Broken
Reason

Congruence
Algebraic expression that expresses the equality of the remains of the two numbers congruent divisions for his module and is normally represented by three horizontal lines (≡) made between those numbers.

Equivalence

Fair value, estimation, potency or efficacy of two or more things or entities

Fraction

Division of something into parts

Part or portion of a whole (takes a fraction of cake).

Dialogical Pedagogy

Feuerstein (1993) mediated learning.

Julian De Zubiria Samper (2006) Towards a Pedagogy dialogue.

Broken

Number expressing one or more parts of the unit divided equally:

Reason

Quotient of two numbers or two quantities of similar (the ratio of 8/2 is 4).

Contenido

Introducción

Se plantea una intervención pedagógica a través de una propuesta didáctica ajustada a los objetivos quese plantean y al currículo oficial vigente.

Esta propuesta reconoce el desarrollo de pensamiento alcanzado por los estudiantes de tercer grado de enseñanza básica primaria y se fundamenta en la revisión formal del conjunto de los números naturales y en algunos aspectos relevantes de la historia.Está ligada al modelo pedagógico “Hacia una Pedagogía Dialogante”[1] que sustenta el quehacer de los docentes, quienes, en el marco de la propuesta, serán los mediadores.

ReuvenFeuerstein (1993) insiste sobre la mediación; “El niño progresa no sólo según un modo de crecimiento genéticamente programado, sino también gracias a los intercambios que él está haciendo constantemente con su entorno (cfr. los conductistas y Piaget). Respondiendo a los estímulos, el niño se estructura -se está estructurando y reestructurando continuamente-, se adapta, aprende, de una forma más o menos eficaz según la importancia de estos estímulos, su frecuencia, su pertinencia, etc. El papel del mediador consiste en intervenir en este proceso. De esto se deduce la vital importancia que concede a la figura del mediador”**.**

Se destaca la intervención de la fracción en el contexto académico y su ineludible conexión con la cotidianidad. Se insinúaquela familiaridadcon el lenguaje y conlos conceptos concomitantes, por parte de los estudiantes, desde su etapa de educación básica posibilita el alcance de los objetivos de otros niveles educativos. Las prácticas educativas son determinantes, el docente como mediador entre el conocimiento de la fracción y los estudiantes, puede promover o hasta impedir que ellos logren aprendizajes significativos y desarrollen habilidades relacionas con estetema.

---

[1] DE ZUBIRÍA SAMPER JULIÁN. Hacia una pedagogía dialogante. (S F)

Si bien es cierto que la práctica educativa(planeación del cómo lograr los objetivos de aprendizaje en los estudiantes)es determinante, también lo es el modelo desde el cual ésta se orienta, y muy seguramente ha sido intencionado por parte de los docentes quienes ajustándose a un curriculum, syllabus, plan de estudios o como haya sido llamado para cada situación particular, han adoptado diversas posturas, han facilitado o complicado el uso de la fracción, o simple pero radicalmente la han eliminado de sus contenidos y la han reemplazado por representaciones numéricas que aparentemente son más fáciles de manipular a través del uso calculadoras, sin que medie una significación adecuada y pertinente.

El interés en el tema, surge por la aplicabilidad del uso de la fracción en múltiples contextos de los que, sin lugar a dudas, hacen parte los individuos que en la escuela no son solamente estudiantes receptores, sino estudiantes quemerecen, de manera importante, hacerse protagonistas de su aprendizaje.

Entonces, para iniciar el presente proyecto, se diseñó una herramienta que permite identificar la problemática que se pretende intervenir de manera didáctica dentro de los escenarios educativos de niños y niñas de tercero y cuarto grado de la educación básica primaria, la cual se aplicó en un grupo de 16 estudiantes de quinto grado de básica primaria de la educación pública, para este caso, en el INEM "Francisco de Paula Santander" de la localidad 8-Kennedy- de Bogotá. Esta herramienta es una prueba escrita que se encuentra en el ANEXO A. en este documento.

A continuación,se presentan los datos de caracterización de la población diagnosticada.

Tabla 1Datos de la población diagnosticada

Estudiantes de quinto grado de educación básica primaria					
Total de estudiantes	Genero		Edad		
	Masculino	Femenino	11 años	12 años	14 años
16	9	7	12	2	1

Después de aplicada la prueba, la información obtenida a partir de sus resultados evidencia que los estudiantes no han desarrollado habilidades conceptuales ni aritméticas relacionadas con la fracción, como puede observarse en la siguiente tabla.

Tabla 1.1 Resultados de la prueba diagnóstica

<table>
<tr><th colspan="6">Tiempo en minutos empleado para la prueba</th><th rowspan="3">Desempeño acertado en Identificación de la fracción como parte de una unidad</th><th rowspan="3">Desempeño acertado en Interpretación de la fracción como parte de un todo</th><th rowspan="3">Desempeño acertado en Manejo de las operaciones de adición y sustracción en la resolución de un problema</th><th rowspan="3">Desempeño acertado en Estimación de Porcentaje</th><th rowspan="3">Desempeño acertado enAnálisis, interpretación de la razón como relación</th></tr>
<tr><th colspan="6">Total de estudiantes</th></tr>
<tr><th>27</th><th>30</th><th>35</th><th>40</th><th>45</th><th>50</th></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>11</td><td>8</td><td>2</td><td>9</td><td>3</td></tr>
</table>

El 69% de los estudiantes analizó correctamente regiones sencillas (sombreadas), pero con conjuntos finitos de elementos como en el caso del grupo musical (pregunta 2) y la aparte A. de la pregunta 4 en donde se presenta la fracción como parte–todo solamente el 50% trabajó correctamente, en general, no identifican el número de partes; fácilmente cofunden “la tercera parte de seis” con “tres” y así mismo, “la mitad de seis” con “dos”; una de las posibles causas fue el manejo del lenguaje, para ellos no existe una conexión clara entre los modelos de palabras (fracciones como partes de un todo) y la cantidad.

Respecto a la adición (pregunta 3) sólo el 13% de los 16 estudiantes trabajó correctamente aunque se proporcionó un dibujo que paso a paso permitía observar los sumandos y la suma. Esto hace pensar acerca de la importancia fundamental que se debe dar al trabajo basado en modelos concretos y gráficos a este nivel de escolaridad.

El 56% de los 16 estudiantes respondió correctamente a la pregunta sobre porcentaje (pregunta 4. B.) quizá la razón establecida 80:100 facilita la interpretación; a diferencia del lenguaje utilizado para las preguntas 2 y 4 como se comentó en un párrafo anterior. Con el uso de un lenguaje más cercano a los estudiantes, se puede crear un escenario adecuadopara implementar el abordaje y planteamiento de actividades en el momento de hacer una propuesta que involucre este concepto, útil y contextual por demás.

Sólo el 19% de los 16 estudiantes logró establecer adecuadamente las razones para describir la relación parte–parte (pregunta 5), lo cual hace pensar en su escasa familiaridad con este tipo de escritura y con el concepto (ANEXO B).

1. Justificación del proyecto

En los siguientes párrafos se exhiben algunos planteamientos que justifican la propuesta.

El aplazamiento del uso de la fracción en el diálogo pedagógico al interior de los espacios académicos forma parte de la cotidianidad. Se evita la forma *“a sobre b”*,y, sin mucha advertencia, se remplaza por las formas decimales, que, en apariencia son menos incómodas. Se puede evidenciar este hecho cuando los estudiantes, en su mayoría, se muestran ansiosos por utilizar herramientas como la calculadora, o, en su defecto, el celular, lamentablemente, en ocasiones, con la anuencia del docente. Esto, en cierta forma, permite pensar que el concepto de fracción se reduce a la división, efectiva, de números naturales.

La escasa familiaridad con las fracciones y hasta el rechazo por las mismas, se evidencia en la educación media;lastimosamente, también,estos problemas se trasladan a la educación superior. Es usual que docentes en estos niveles, apoyados en la revisión de los programas curriculares actuales, establezcan una “cadena de culpabilidad” se declaren “inocentes” y “descubran”, sin temor a caer en la equivocación, a los “verdaderos culpables”.

Si se lograra la inserción de las formas *“a sobre b”* tanto en el lenguaje escrito como en los diálogos informales, se alcanzaría mayor precisión en contextos cotidianos comola información, las finanzas, pesos y medidas, la distribución y la convivencia; así mismo, se garantizaría la familiaridad con la escritura y con el concepto, apuntando, por esta vía, a la declaración de la “inocencia” frente a los juicios que señalaron a la Educación Básica Primaria como la gran responsable de la desaparición, del equipaje de los estudiantes, de los elementos básicos relacionados con la fracción.

A través de representaciones adecuadas, desde lo disciplinar, desde lo contextual, desde lo cotidiano y desde lo pedagógico, se pretende lograr un mejor desempeño integral de nuestros estudiantes, como actores sociales.

> "*No basta con tener ideas organizadas, el nuevo reto es lograr que los estudiantes aprendan a usar el conocimiento, es decir, que aprendan a concluir, investigar, proponer, argumentar, conquistar, enamorar, preguntar, leer".*[2]

Desde otra de las dimensiones de los grupos humanos, se puede observar que, la población de estudiantes de la Educación Básica Primaria, principalmente de los colegios oficiales, se presenta cronológicamente heterogénea con carencias afectivas y académicas muy marcadas, en donde urge una fuerte motivación de superación a través de propuestas escolares que logren permear su cotidianidad. De acuerdo con el punto desde donde se observe, estas características facilitan o dificultan el desarrollo formal de la propuesta curricular vigente, extractada del documento del ICFES "Fundamentación Conceptual Área de Matemáticas".

Partiendo de esta caracterización y atendiendo el compromiso social y académico de los docentes, es posible apoyar el desarrollo de la propuesta en las sugerencias, tácitas, del libro Enseñanza del Número Racional Positivo en educación primaria de Rafael Escolano Vizcarra y en el texto de José María Gairin Números Racionales Positivos: Reflexiones sobre la Instrucción de la Universidad de Zaragoza en donde se discute acerca de las ventajas y desventajas de implementar determinadas estrategias y desarrollar ciertas actividades en la Básica Primaria relacionadas con los Números Racionales.

Otro texto que integra las perspectivas histórica y didáctica es precisamente "Historia y Didáctica de los Números Racionales e Irracionales" de Francisco Luis

---

[2]Granada Andrés y Tirado Luz Adriana. Pedagogía Conceptual. 2004

Flores Gil quien destaca elementos históricos que se pueden transformar en instrumentos didácticos eficaces que facilitan los procesos de enseñanza y aprendizaje.

> Las fracciones aparecen ya en los primeros textos matemáticos de los que hay constancia, quizás uno de los más antiguos y más importantes sea el Papiro Rhind de Egipto, escrito hacia el 1.650 a.C. y que pasa por ser la mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia.
> En Occidente tuvieron que pasar muchos siglos hasta que los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indoarábigo. Este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa.
> Sin embargo, no fue hasta el S. XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números "ruptus", empleando además la raya para separar el numerador del denominador. [3]

> "Los egipcios solamente sabían operar con fracciones de la unidad, y se veían obligados a reducir las demás cantidades a esa forma. Con excepción de los 2/3, para los que poseían un signo especial, cada fracción debía expresarse como la suma de una serie de fracciones con numerador 1. Por ejemplo, la fracción ¾ se escribía como ½, ¼ (obsérvese que no utilizaban el signo de adición), y 2/61 se expresaba así: 1/40,1/244,1/488,1/610."[4]

De otra parte, Andrés Granada y Luz Adriana Tirado en el documento sobre Pedagogía Conceptual (2004) hacen referencia a la posibilidad de romper un poco el esquema de una acción escolar netamente informativa para ser intercambiada por una en donde se reconozca el desarrollo sico-social y el contexto académico de los estudiantes de primaria. Y en el artículo "Una mirada a la Aritmética de la escuela" de Myriam Acevedo y Crescencio Huertas publicado en los Cuadernos de Matemática Educativa plantean la importancia de proponer una revisión exhaustiva de lo disciplinar para abandonar equivocadas concepciones de los Números Racionales, invitación imposible de rechazar, con miras a plantear una propuesta didáctica que enfrente estos retos y responda efectivamente a las necesidades que se plantean desde lo conceptual y sobre todo desde lo significativo hasta lograr enamorar principalmente a los docentes, y por su mediación a los estudiantes.

---

[3] FLORES GIL FRANCISCO LUIS. Historia y Didáctica de los Números Racionales e Irracionales. Publicatuslibros.com. Universidad de Sevilla. 2008. P. 7

[4] NEWMAN JAMES R. SIGMA EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS Tomo 1 Capítulo 2. El Papiro Rhind. P 99

1.1 Planteamiento del problema

Aunque un buen número de estudiantes de tercero y cuarto grados de educación básica primaria,cuyas edades oscilan entre los 8 y los 10 años, tienen una aceptable aproximación a la precisión con las operaciones entrenúmeros naturales, no se evidencia, entrelos estudiantes de quinto y aún de sexto grado, familiaridad con las formas racionales *“a sobre b”*.

Aunque prolifera en el mercado una avalancha de información impresa en los productos que están al alcance de nuestros estudiantes (sobre contenido nutricional, compuestos, pesos y medidas e instrucciones para preparar de manera fácil una bebida) ésta no se trae a las aulas. Es lamentable, pues de ser utilizada adecuadamente, podría convertirse en una herramienta poderosa que enlazara la cotidianidad con las prácticas escolares, llevando poco a poco entre docentes y estudiantes, las formas decimales y porcentuales de las cajas de yogurt, de los empaques de papas, de salsa de tomate o de las bolsas de refresco, a las formas *“a sobre b”.*

No cabe duda sobre la pertinencia de la estrategia para alcanzar uno de los objetivos de la propuesta: dotar de significado a la fracción en contextos próximos al estudiante.

1.2 Objetivo general.

Con el propósito de dar solidez a esta propuesta y hacerla alcanzable,se plantea el siguiente objetivo general:

- Construir una propuesta didáctica fundamentada en el análisis disciplinar y didáctico del concepto de número racional y sus contextos de significación para los estudiantes de 3º y 4º grados de Educación Básica Primaria.

1.3 Objetivos específicos.

- Revisar la estructura algebraica de los Números Racionales $\langle Q; +, \cdot \rangle$
- Revisar el desarrollo histórico del concepto de número racional, en particular lo relacionado con su significación como número y como cociente, evidenciando la presencia de las formas *“a sobre b”* en diferentes contextos y escenarios.
- Analizar investigaciones acerca de obstáculos epistemológicos y cognitivos relacionados con el concepto y significaciones del número racional.
- Proponer una estrategia didáctica, para la Educación Básica Primaria, que privilegie el concepto y el significado, y que facilite la manipulación de las fracciones como número, como razón y como relación parte-todo.

2.Marco referencial

Resulta curioso que a través de la búsqueda de significados y significación de la fracción en los escenarios sociales y académicos nos encontremos con el uso indiscriminado de las palabras fracción, razón, fraccionario, quebrado o racional, para referirse al mismo concepto.

Encontramos que hay quienes hacen cierta diferenciación entre ellas, pero a la postre, todos coinciden en afirmar que se trata de una división de números enteros de la cual se nutren no precisamente para establecer relaciones parte-todo referidas a una magnitud sino para dar respuesta a problemas establecidos de distribución, veamos algunas evidencias:

FRACCIONARIO.[5](Textualmente)

"Un número fraccionario es el que sirve para contar partes o fragmentos iguales en que se ha dividido la unidad.
Se escribe utilizando dos números naturales, llamados numerador y denominador, separados con una raya horizontal.
El numerador indica las partes que contamos.
El denominador indica el nombre de las partes iguales en que se divide la unidad.
El número fraccionario y la unidad:
Los números fraccionarios cuyo numerador es menor que el denominador expresan cantidades menores que la unidad.
Los que tienen el numerador mayor que el denominador expresan cantidades mayores que la unidad.
Cuando el numerador y el denominador son iguales, el numero fraccionario representa la unidad".

---

[5]http://eljovenmatematico.blogspot.com/2008/01/nmeros-fraccionarios-por-el-joven.html

FRACCIÓN.[6](Textualmente)

"El concepto matemático de fracción corresponde a la idea intuitiva de dividir una totalidad en partes iguales, como cuando hablamos, por ejemplo, de un cuarto de hora, de la mitad de un pastel, o de las dos terceras partes de un depósito de gasolina. Tres cuartos de hora no son, evidentemente, la misma cosa que las tres cuartas partes de un pastel, pero se "calculan" de la misma manera: dividiendo la totalidad (una hora, o el pastel) en cuatro partes iguales y tomando luego tres de esas partes. Por esta razón, en ambos casos, se habla de dividir dicha unidad (una hora, un pastel, etc.) en 4 partes iguales y tomar luego 3 de dichas partes.

Una fracción se representa matemáticamente por números que están escritos uno sobre otro y que se hallan separados por una línea recta horizontal llamada raya fraccionaria.

La fracción está formada por dos términos: el numerador y el denominador. El numerador es el número que está sobre la raya fraccionaria y el denominador es el que está bajo la raya fraccionaria.

a	*Numerador*
—	-
b	*Denominador*

El Numerador indica el número de partes iguales que se han tomado o considerado de un entero.
El Denominador indica el número de partes iguales en que se ha dividido un entero".

QUEBRADO.[7](Textualmente)

"Los quebrados, llamados también números fraccionarios o fracción es el cociente de dos números llamados numerador y denominador.
Así, por ejemplo, el cociente de 5 y 2, indicado mediante una raya horizontal __ es una fracción compuesta de dos términos, el numerador 5 y el denominador 2.
Entendiendo que parte alícuota (proporcional) de la unidad, es cada una de aquellas que resultade dividir la unidad en partes iguales, podría definirse que, unidad fraccionaria es cada una de las partes alícuotas de la unidad, y fracción un número determinado de unidades fraccionarias.
El denominador (que siempre se supone distinto de cero) indica el número de partes en que se ha dividido la unidad, y el numerador el número de estas unidades fraccionarias que se considera.

---

[6] http://www.profesorenlinea.cl/matematica/FraccionConcepto.htm
[7] http://espanol.answers.yahoo.com/question/index?qid=20071216153200AAiEIev

Para leer una fracción se lee el numerador, seguido del nombre de la unidad fraccionaria que exprese el denominador. Así: 3/2 tres medios; 1/3 un tercio, 3/4 tres cuartos, 7/5 siete quintos…
Clases de fracciones.- Las fracciones se clasifican en: propias e impropias.
Se llama fracción propia, a aquella que tiene el numerador menor que el denominador.
Ejemplos: 3/5; 6/9; 1/3...
Fracción impropia es aquélla que tiene el numerador mayor que el denominador.
Ejemplos: 12/7 ; 15/6 ; 27/11...
Un caso particular de la fracción impropia es cuando el numerador es múltiplo del denominador, o lo que es lo mismo, la fracción equivale a un número entero, ya que el cociente es exacto. Esta fracción se llama fracción aparente".

También, podemos incluir en este concepto la nota insertada anteriormente:.."no fue hasta el S. XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números "ruptus", empleando además la raya para separar el numerador del denominador".

RAZÓN[8].(Textualmente)

En los textos clásicos sobre razones y proporciones, las nociones de razón yfracción pierden sus diferencias históricas para identificarse una con la otra, porejemplo, Leyssenne (1913, p. 169, citado por Chevallard y Jullien, 1989, p. 124),señala que "una fracción puede ser considerada como una razón" y que "las razones desempeñan todas las propiedades de las fracciones, y todas las operaciones de cálculo se ejecutan tanto en unas como en otras".

NUMERO RACIONAL.[9](Textualmente)

"Se llama número racionala aquel que puede representarse de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y más exactamente b es un entero positivo, eso significa que b debe ser diferente de cero. Su nombre de racional hace referencia a fracción o parte de un todo. Este conjunto se denota por$\mathbb{Q}$.

---

[8] RAMÍREZ M, BLOCK, D. La Razón y la Fracción: Un vinculo difícil en las matemáticas escolares. Educación Matemática. Vol 21, núm. 1, abril. 2009, pp 63 – 90. Santillana. Distrito Federal, México
[9]Sobre la Construcción de los Números Enteros y Racionales
Dr. Rafael Labarca Briones, Profesor de Matemáticas. Universidad de Santiago de Chile.
Charlas dictadas en la EMALCA de Salta-Argentina.

La definición estricta de número racional depende de su estructura, por eso, un número racional es el conjunto de todas las fracciones que son equivalentes a una fracción dada. La fracción irreductible es la representante canónica de dicho número racional”.

“Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre “razón” y “fracción”, ya que las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros”[10].

Se destaca la insistencia de los autores al señalar que las partes en que se divide una unidad deben ser congruentes.

Identificar la razón con la fracción se convierte en una práctica un tanto peligrosa pues existen, entre ellas, diferencias que las instalan como conceptos distantes.

Mientras que la razón es una relación parte-parte o todo-todo, la fracción relaciona parte–todo.En la razón el todo no está claramente definido.

---

[10]GODINO Juan D. Matemáticas para Maestros. Proyecto *Edumat-Maestros.* Universidad de Granada. 2004

2.1 Aspectos conceptuales

Teniendo en cuenta que este trabajo sedirige a estudiantes de tercer grado de educación básica primaria, en donde los desarrollos matemáticos se valen del conjunto N de los números naturales, se hace a continuación, una revisión de nociones básicas, que apoyarán el estudio de los conceptos que constituyen la base de la propuesta y que abren paso ala consolidación de los objetivos planteados.

Al conjunto N de los números naturales pertenecen los números que sirven para contar; $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Cada número natural n tiene sucesor: $n + 1. n + 1 = sig\ (n)$

El producto cartesiano $N \times N$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas de númerosnaturales; $N \times N = \{(a, b) : a \in N,\ b \in N\}$

Teorema.Existe una operación binaria en N, que a cada par ordenado (a, b) de números naturales asigna un número natural indicado por $a + b$, tal que:

[1] Para todo $a \in N$es $a + 0 = a$

[2] Para todo $a \in N$ y todo$b \in N$ es$a + sig(b) = sig\ (a + b)$

Definición. $a + b$se llama suma de $a\ y\ b$. La operación se llama adición.

Propiedad asociativa de la adición: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Propiedad conmutativa de la adición: $a + b = b + a$

Existencia del elemento neutro: $0 \in N$; 0 es el elemento neutro de la adición en N ya que para todo $a \in N$: $a + 0 = 0 + a = a$

Si $b \neq c,\ entonces,\ a + b \neq a + c\ \ para\ todo\ a \in N$

Propiedad cancelativa de la adición: Si $a + b = a + c$, $entonces, b = c$

Teorema. Existe una operación binaria en N que a cada par ordenado (a , b) de números naturales asigna un número natural indicado por $a . b$, tal que:

[1] Para todo $a \epsilon N$ es $a . 0 = 0$

[2] Para todo $a \epsilon N$ y todo $b \epsilon N$ es $a . sig(b) = a . b + a$

Definición. $a . b$ se llama producto de a y b. La operación se llama multiplicación

Propiedad asociativa de la multiplicación: $(a . b) . c = a . (b . c)$

Propiedad conmutativa de la multiplicación: $a . b = b . a$

Existencia del elemento neutro: $1 \epsilon N$ puesto que $1 = sig (0)$; 1 es el elemento neutro de la multiplicación en N ya que para todo $a \epsilon N$: $a . 1 = 1 . a = a$ porque

$$
\begin{aligned}
a . 1 &= a . sig (0) \\
&= a . 0 + a \\
&= 0 + a \\
&= a
\end{aligned}
$$

Si $a \neq b$, $a \neq 0$, b y c $no\ simultáneamente\ iguales\ a\ cero$, $entonces$,

$a . b \neq a . c$ $para\ todo\ a \epsilon N$

Propiedad cancelativa de la multiplicación:

Si $a \neq 0$ y $a . b = a . c$, $entonces$, $b = c$

La multiplicación es distributiva respecto de la adición:

$$a . (b + c) = a . b + a . c \quad y \quad (b + c) . a = b . a + c . a$$

Orden en N:

Definición. Si $a + b = c$, se dice que $a \leq c$ "$a\ es\ menor\ o\ igual\ que\ c$" y

si $a \neq c$, $o\ sea$ $b \neq 0$, se dice que $a < c$ "$a\ es\ menor\ que\ c$".

Dados a , b ϵN se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:

(i) $a = b$

(ii) $a < b$

(iii) $b < a$

La relación $\leq$ tiene las siguientes propiedades:

(i) Reflexiva: $a \leq a$

(ii) Antisimétrica: $Si \ \ a \ \leq b \ \ ,y, \ \ b \leq a \ ,entonces, \ \ a = b$

(iii) Transitiva: $Si \ \ a \ \leq b \ \ ,y, \ \ b \leq c \ ,entonces, \ \ a \leq c$

$\leq$es una relación de orden.

Veamos:

(i) Reflexiva: $a \leq a$, en efecto, $a + 0 = a$ (def.)

(ii) Antisimétrica: $Si \ \ a \ \leq b \ \ ,y, \ \ b \leq a \ ,entonces, \ \ a = b$

$Si \ \ a \ \leq b \ \ ,y, \ \ b \leq a \ ,entonces, \ \ a + x = b \ \ ,y, \ \ b + y = a$sumando término a término estas dos igualdades se tiene:

$$\begin{array}{r} a + x = b \\ b + y = a \\ \hline (a + x) + \ (b + y) = b + a \end{array}$$

Por propiedades conmutativa y asociativa de la adición:

$$(a + b\ ) + (x + y\ ) = b + a$$

Por conmutatividad $a + b = b + a$, entonces $x + y = 0$, lo que implica

$$x = 0 \ \ ,y, \ \ y = 0$$

de lo cual se concluye: $a + x = b\ ; \ \ x = 0 \ \ entonces \ \ a + 0 = b \ \ luego \ \ a = b$

$$b + y = a\ ; \ \ y = 0 \ \ entonces \ \ b + 0 = a \ \ luego \ \ b = a$$

(iii) Transitiva: $Si \ \ a \ \leq b \ \ ,y, \ \ b \leq c \ ,entonces, \ \ a \leq c$

$Si \ \ a \ \leq b \ \ ,y, \ \ b \leq c \ , \ entonces, \ a + x = b \ \ \ ,y, \ \ \ b + y = c$sumando término a término estas dos igualdades se tiene:

$$\begin{array}{r} a + x = b \\ b + y = c \\ \hline (a + x) + (b + y) = b + c \end{array}$$

Por propiedades conmutativa y asociativa de la adición:

$$\begin{aligned} b + \big(a + (x + y)\big) &= b + c \quad \textit{por la propiedad cancelativa de la adición} \\ a + (x + y) &= c \quad \textit{entonces, por definición} \\ a &\leq c \end{aligned}$$

Denotaremos por N^* al conjunto de todos los números naturales diferentes de cero, es decir, si $a \epsilon N^*$entonces, $a \neq 0.N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

El producto cartesiano$N \times N^*$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas de números naturales cuya segunda componente es diferente de cero.

$$N \times N^* = \{(a, b) : a \epsilon N, y, b \epsilon N^*\}$$

A partir de este conjunto, se construye una relación (~) de equivalencia así:

(Nota! Emplearemos de aquí en adelante la notación $a\,b$ en reemplazo de $a\,.\,b$)

Si $(a, b) \epsilon N \times N^*, y, (c, d) \epsilon N \times N^*; (a, b) \sim (c, d)$ $si\ y\ sólo\ si$ $a\,d = b\,c$.

¿Cómo se llega a esta relación de equivalencia?

Definición.

$(a, b) \sim (c, d)$ $sí\ y\ sólo\ sí\ existen\ dos\ números\ naturales\ p\ y\ q\ primos\ relativos$ $(*)$

$$y\ dos\ números\ naturales\ m\ y\ n\ tales\ que \begin{cases} a = p\,m & c = p\,n \\ b = q\,m & d = q\,n \end{cases}$$

Entonces, $(a, b) \sim (c, d)$ $si\ y\ sólo\ si$ $a\,d = b\,c$ significa
$(pm, qm) \sim (pn, qn)$ $sí\ y\ sólo\ sí$ $(pm)(qn) = (qm)(pn)$; en efecto:

$(pm)(qn) = (qm)(pn)$puesto que si aplicamos propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación al segundo término de esta igualdad se tiene que:

$$(pm)(qn) = (pm)(qn)$$

(*) $p\ y\ q\ \ primos\ relativos$significa que el máximo común divisor de $p\ y\ q$ es 1, es decir, que $p\ y\ q$ no tienen divisores comunes diferentes de 1. $\langle p\ , q\ \rangle = 1$

Definición. Una relación R en un conjunto no vacío A se llama de equivalencia si tiene las propiedades

(i) Reflexiva. $Si\ \ x \in A\ , entonces,\ \ x\ R\ x$

(ii) Simétrica. $Si\ \ x\ R\ y\ , entonces,\ \ y\ R\ x$

(iii) Transitiva. $Si\ \ x\ R\ y\quad , y\ ,\ \ y\ R\ z\ , entonces,\ \ x\ R\ z$

La relación $\sim$ así definida es una relación de equivalencia en $N \times N^*$, ya que cumple ser:

(i) Reflexiva:$Para\ todo\ \ (\ a\ ,\ \ b\ ) \in\ \ N \times N^*$ se tiene que$(\ a\ ,\ \ b\ ) \sim\ (\ a\ ,\ \ b\ )$

(ii) Simétrica: Si $(\ a\ , b\ ) \sim (\ c\ , d\ )\ \ entonces\ \ \ (\ c\ , d\ ) \sim (\ a\ , b\ )$

(iii) Transitiva: Si $(\ a\ , b\ ) \sim (\ c\ , d\ )\ , y\ , (\ c\ , d\ ) \sim (\ e\ , w\ )\ entonces\ (a\ , b) \sim (e\ ,\ \ w)$

Veamos:

(i) Reflexiva:$Para\ todo\ \ (\ a\ ,\ \ b\ ) \in\ \ N \times N^*$ se tiene que$(\ a\ ,\ \ b\ ) \sim\ (\ a\ ,\ \ b\ )$

$(\ a\ ,\ \ b\ ) \sim\ (\ a\ ,\ \ b\ )$puesto que
$a\ b\ = b\ a \quad (propiedad\ conmutativa\ de\ la\ multiplicación\ en\ N)$

(ii) Simétrica: Si $(\ a\ , b\ ) \sim (\ c\ , d\ )\ \ entonces\ \ \ (\ c\ , d\ ) \sim (\ a\ , b\ )$

Si $(\ a\ , b\ ) \sim (\ c\ , d\ )$entonces $a\ d = b\ c$. De acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación en N , se tiene que$d\ a = c\ b$,y, por simetría de la igualdad, si $d\ a = c\ b$entonces $c\ b = d\ a$lo cual conduce a $(\ c\ , d\ ) \sim (\ a\ , b\ )$

(iii) Transitiva: Si $(\ a\ , b\ ) \sim (\ c\ , d\ )\ , y\ , (\ c\ , d\ ) \sim (\ e\ , w\ )\ entonces\ (a\ , b) \sim (e\ ,\ \ w)$

Si $(\ a\ , b\ ) \sim (\ c\ , d\ )\ , y\ , (\ c\ , d\ ) \sim (\ e\ , w\ )$ entonces:

$$a\ d\ =\ \ b\ c\ \ \ (1)\quad , y, \quad c\ w\ =\ \ d\ e\ (2)$$

Multiplicando por w la igualdad (1)(propiedad cancelativa de la multiplicación)$(a\,d)\,w\ = (\,b\,c\,)\,w(1')$

Multiplicando por b la igualdad (2)(propiedad cancelativa de la multiplicación)

$$(c\,w\,)\,b\ =\ (\,d\,e\,)\,b(2')$$

Por propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación en N aplicadas en $(1')$ y $(2')$ se tiene:

$$(1'')(\,a\,w\,)\,d\ =\ c\,(\,b\,w\,)(2'')\qquad c\,(\,b\,w\,) =\ (\,b\,e\,)\,d$$

Sumando término a término las igualdades $(1'')\ y\ (2'')$se tiene:

$$(\,a\,w\,)\,d\ + c\,(\,b\,w\,)\ =\ c\,(\,b\,w\,) +\ (\,b\,e\,)\,d$$

Por propiedad conmutativa de la adición en N:

$$(\,a\,w\,)\,d\ + c\,(\,b\,w\,)\ =\ (\,b\,e\,)\,d\ +\ c\,(\,b\,w\,)$$

Por propiedad cancelativa de la adición:

$$(\,a\,w\,)\,d\ =\ (\,b\,e\,)\,d$$

Por propiedad cancelativa de la multiplicación:

$a\,w =\ b\,e$lo que significa $(\,a\,,b\,) \sim (\,e\,,w\,)$

Como la relación$\sim$ construida en $N\,\times\,N^*$ es de equivalencia, genera una partición: $N\,\times\,N^*/_\sim$. Cada una de estas partes es una clase de equivalencia respecto de $\sim$.

El conjunto de clases de equivalencia$N\,\times\,N^*/_\sim$se reconoce como el conjunto de las fracciones. Cada clase de equivalencia es una fracción.

Una fracción es un par ordenado $(a\,,b\,)\,\epsilon\,N\ \times N^*$, usualmente serepresentacomo$\frac{a}{b}$, a (primera componente) se llama numerador y b (segunda componente) se llama denominador.

Por ejemplo: $(\,2\,,\ 3\,) = \frac{2}{3}$

En consecuencia, como$(a , b) \sim (c , d)$ $sí\ y\ sólo\ si\ \ a\, d = b\, c$ se tiene ahora que $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ $sí\ y\ sólo\ si\ \ a\, d = b\, c$

Se dice que dos fracciones$\frac{m}{n}$ y $\frac{m'}{n'}$son iguales $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ $si\ existen$

$$p\ y\ \ q\ \ primos\ relativos\ \ y\ \ dos\ números\ naturales\ \ a\ \ y\ \ b\ \ tales\ que:$$

$$m = pa \qquad\qquad m' = pb$$

$$n = qa \qquad\qquad n' = qb$$

De donde se tiene $\frac{p\, a}{q\, a} = \frac{p\, b}{q\, b}$, en efecto, $(p\, a)(q\, b) = (q\, a)(p\, b)$.

Entonces, $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ $\quad sí\ y\ sólo\ sí \quad m\, n' = n\, m'$

La clase de equivalencia de $\frac{a}{b}$ se denota por $[(a , b)]$ y a ésta pertenecen todas las fracciones equivalentes con $\frac{a}{b}$

Cuando dos fracciones son iguales se dice que pertenecen a la misma clase de equivalencia,por ejemplo $\frac{24}{16}$ y $\frac{8}{12}$ pertenecen a la misma clase de equivalenciapuesto que $(24 , 16) \sim (8 , 12)$, entonces $\frac{24}{16} = \frac{8}{12}$

Veamos,$\frac{24}{16} = \frac{12}{8}$, $existen\ \ 2\ y\ 3\ \ primos\ relativos.\ \ 4\ y\ 8\ son\ enteros\ tales\ que:$

$$\begin{array}{ll} 24 = 3 \times 8 & 12 = 3 \times 4 \\ 16 = 2 \times 8 & 8 = 2 \times 4 \end{array}$$

Entonces: $\frac{3 \times 8}{2 \times 8} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4}$

La fracción irreductible de una clase de equivalencia es un número racional (racional positivo en este contexto).

Por ejemplo, $\frac{2}{3}$(es irreductible porque $2\ y\ 3$ son primos relativos) representa cualquier fracción del conjunto$\left\{\frac{2}{3}\ ,\ \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \ldots\right\}$que es, precisamente, la clase de equivalencia de $\frac{2}{3}$.

Se dice también que $\frac{2}{3}$ es el representante de clase, o, representante canónico de la clase de equivalencia$[(\,2\,,3\,)]$; $[(\,2\,,3\,)] = \left\{\frac{2}{3}\ ,\ \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \ldots\right\}$

El conjunto $Q^{\,+}$de los números racionales positivos en nuestro contexto es entonces$Q^{+} = \left\{\frac{a}{b} :\ a \in N\ ,\ b \in\ N^{*}\right\}$

$$0\ =\ \frac{0}{1}\ ,\qquad o\ ,\qquad 0 = \frac{0}{b}$$

Se definen en $Q^{+} \cup \{\,0\,\}$ dos operaciones:

[1] La adición:$\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\ =\ \frac{a\ +\ c}{b}$ cuando se busque $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\ \ con\ b \neq d$se recurre a la relación de equivalencia para llevar los sumandos $\frac{a}{b}\ y\ \frac{c}{d}$a sumandos equivalentes, pero ahora con igual denominador, tenemos entonces:

$\frac{a}{b}\ =\ \frac{a\,d}{b\,d}\quad y\quad \frac{c}{d}\ =\ \frac{b\,c}{b\,d}\ ;$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{b\,c}{b\,d}$para tener, en general, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$

$$\frac{a}{b} + 0\ =\ \frac{a}{b} + \frac{0}{1}\ =\ \frac{a}{b}$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{0}{1} &= \frac{(\,a\,)(\,1\,) + (\,b\,)(\,0\,)}{(\,b\,)(\,1\,)} \\ &= \frac{a\ +\ 0}{b} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}\right)$$

[2] La multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

$$1 = \frac{1}{1} \;, o, \; 1 = \frac{n}{n} \;;$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

Asociativa: $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{w} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{w}\right)$ y

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{w} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{w}\right)$$

Conmutativa: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ y

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

Existencia de elemento idéntico o módulo:

$$0 \in Q^{+} \cup \{\,0\,\} \;; \quad 0 = \frac{0}{1} \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

0es el módulo o elemento idéntico de la adición en $Q^{+} \cup \{\,0\,\}$

$$1 \in Q^{+} \cup \{\,0\,\};\; 1 = \frac{1}{1} \;, o \,, \qquad 1 = \frac{n}{n} \;\; ; \;\; \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a}{b}\right)$$

1es el módulo o elemento idéntico de la multiplicación en $Q^{+} \cup \{\,0\,\}$

Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{w}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{w}$$

$$\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{w}\right) \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{e}{w} \cdot \frac{a}{b}$$

Orden.

Se define en$Q^{+} \cup \{ 0 \}$ la relación $\leq$.

Se dice que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ si $a\,.\,d \leq b\,.c$(es la relación definida en N)

La relación $\leq$ en $Q^{+} \cup \{0\}$es una relación de orden.

(i) Refelxiva: $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$

(ii) Antisimétrica: Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ $, y,$ $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ $, \; entonces,$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(iii) Transitiva: Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ $, y,$ $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{w}$ $, \; entonces,$ $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{w}$

Veamos:

(i) Refelxiva: $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$ entonces $a\,b \leq ba$, por conmutatividad en $\boldsymbol{N} b\,a = a\,b$, entonces $a\,b \leq a\,b$ (propiedad reflexiva de orden en N)

(ii) Antisimétrica: Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ $, y,$ $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ $, \; entonces,$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Como $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ $, y,$ $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ entonces

$$a\,d \leq b\,c \quad y \quad c\,b \leq d\,a$$

Por definición de orden en N se tiene que $a\,d + x = b\,c \quad y \quad c\,b + y = d\,a$ [1]

Sumando término a término estas igualdades: $(a\,d + x) + (c\,b + y) = b\,c + d\,a$

Por conmutatividad y asociatividadde la adición y la multiplicación en N:

$(a\,d + cb) + (x + y) = b\,c + d\,a$, entonces $x + y = 0$ lo que implica $x = 0 \quad y \quad y = 0$

Entonces para [1] tenemos:

$$a\,d + x = b\,c \quad es \quad a\,d + 0 = b\,c\,,$$
$$es\,decir, \; a\,d = b\,c \quad entonces \; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$y, \quad c\,b + y = d\,a \quad es \quad c\,b + 0 = d\,a\,,$$
$$es\,decir, \; c\,b = d\,a \quad entonces \; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ocurre en N que si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un mismo número natural, ésta se conserva, no cambia de sentido.

Si $a\,,b,c\,\epsilon\,N \quad y \quad a \leq b \quad entonces \quad a\,c \leq b\,c$. ☼

Veamos: $a \leq b \quad entonces \quad a + x = b$

Por la propiedad cancelativa de la multiplicación: $(a + x)\,c = b\,c$

Por la propiedad distributiva: $a\,c + x\,c = b\,c$

Entonces, por definición de orden en N: $a\,c \leq b\,c$

Demostremos la propiedad transitiva:

(iii) Transitiva: Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ $,y,$ $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{w}$, $entonces,$ $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{w}$

Como $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ $,y,$ $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{w}$ entonces: $a\,d \leq b\,c\,(1) \quad y \quad c\,w \leq d\,e(2)$

Multipliquemos por w la desigual (1): $(a\,d)\,w \leq (b\,c)\,w$

Multipliquemos por b la desigual (2): $(c\,w)\,b \leq (d\,e)\,b$

Por conmutatividad de la multiplicación en N tenemos:

$$(a\,w)\,d \leq (b\,c)\,w \quad y \quad (b\,c)\,w \leq (b\,e)\,d$$

Por transitividad del orden en N, se concluye $(a\,w\,)d \leq (\,b\,e\,)d$

Entonces por ☼ se tiene que $(a\,w\,) \leq (\,b\,e\,) \quad es \;\; decir,$ $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{w}$

2.2 Una mirada a la historia

Las matemáticas son, en comienzo, el reflejo de la cultura y las condiciones sociales y económicas en que se inscribe su quehacer sin que se reduzca a un simple producto.

Recurrir a la historia, en el desarrollo temático de cualquier disciplina, resulta ser una buena estrategia didáctica. Se logra, por esta vía, una excelente motivación pues a la vez que se despierta la curiosidad, se plantea el contraste entre la cotidianidad, la cultura y los desarrollos alcanzados a través del tiempo.

En el marco de esta propuesta, se invita, abiertamente, a los docentes mediadores a hacer una revisión de la historia de la matemática en el contexto específico de la razón, las fracciones, la proporcionalidad y los números racionales. Existen, a nuestro alcance, documentos importantes que aportan problemas interesantes y anécdotas que pueden ser utilizados como libreto para iniciar el desarrollo del tema que es objeto de estudio[11], lo cual, no sólo es válido sino conveniente si se plantean de la manera más completa posible.

Y puesto que la matemática se construye, no es una ciencia acabada, resulta fascinante, al interior de las aulas, departir y conversar con los hechos y con aquellos que se dieron a la tarea de universalizar y facilitar el acceso a teorías que cambiarían, de manera contundente, la mirada hacia el empleo, formal y práctico, de elementos básicos de conteo y de medida.

Hagamos un breve recorrido por las civilizaciones que mayores aportes hicieron al desarrollo del tema que nos ocupa.

Los babilonios (3000 A C) idearon un sistema de numeración posicional (las cifras valen según su posición dentro del número) y sexagesimal (en base 60 cada

[11] http://www.youtube.com/watch?v=t_EJq-fiJlAhttp://www.youtoube.com/ Historia de las fracciones. Video.

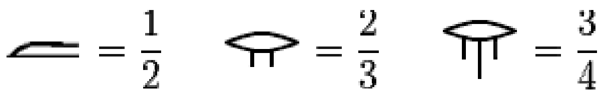
unidad grande está formada por 60 unidades más pequeñas). Usaron este mismo sistema para representar fracciones sexagesimales, es decir, con potencias de 60 en el denominador.

Las matemáticas egipcias se desarrollaron bajo un enfoque práctico sin preocuparse demasiado por teorías ni formalismos. Expresaban los números racionales como sumas de fracciones unitarias, es decir sumas de los inversos de los números enteros positivos, a excepción de 2/3 y de 3/4. Por ejemplo: el jeroglífico que indicaba una fracción era una boca, y significaba la "parte": 

Las fracciones eran escritas con el signo **r** encima del número; en notación actual: 1 como numerador, y el número escrito debajo como denominador. Así, 1/3 se representaba como:

1/3

Había símbolos especiales para 1/2 y para dos fracciones, 2/3 (usado con frecuencia) y 3/4 (utilizado algo menos):



El Ojo de Horus*Udyat* contiene los signos de los primeros números racionales.

Se aprecia cómo los egipcios introdujeron una escritura formal para referirse a las fracciones con escrituras propias e independientes.

Estos aportes se pueden ligar a la propuesta en el sentido de la búsqueda de un lenguaje apropiado y significativo para representar con una fracción la descripción de situaciones de la cotidianidad o experiencias del aula de clase. ANEXO D. Descripción de actividades –La Razón- y –La fracción como parte-todo.

Debido al sistema económico y social, donde todo trabajador estaba a cargo del faraón o los templos, y en el cual en todo comercio o trabajo se operaba por trueque, los egipcios adquirieron una gran maestría en el manejo de fracciones.

Al escriba correspondía llevar a cabo una gran contabilidad material, tanto el registro de la producción (suministro de simientes, herramientas, materias primas y recogida de cosechas), como para el reparto de los bienes de consumo (alimentos, vestidos,) entre los miembros de las comunidades agrícolas o artesanas. Esto explica la importancia de los problemas de reparto y de la fidelidad al sistema de fracciones.

La civilización griega es la de los grandes aportes tanto por la vigencia de sus postulados como por la implementación del método deductivo.

En la esfera de las matemáticas, las razones parecen haber sido primigenias: permitieron expresar, en las antiguas matemáticas griegas, relaciones entre números no múltiplos cuando únicamente los naturales eran reconocidos como números; permitieron dar cuenta, desde entonces, de relaciones entre magnitudes inconmensurables que mucho después se expresaron con números irracionales, por ejemplo, la identificación de que la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal es constante (Smith, 1958; Collette, 1998; Comin, 2000). Así, las razones representaron, más de una vez, unpapel en la historia para permitir explorar una estructura numérica antes de que ésta se estableciera formalmente[12].

La propuesta inicia con el estudio de la razón, para abordar luego el estudio de la fracción (ANEXO D. Descripción de actividades) familiariza a los estudiantes con las nuevas representaciones a la vez que las dota de significado.

---

[12] RAMÍREZ M, BLOCK, D. La Razón y la Fracción: Un vinculo difícil en las matemáticas escolares. Educación Matemática. Vol 21, núm. 1, abril. 2009, pp 63 – 90. Santillana. Distrito Federal, México

“Los elementos de Euclides tratan separadamente la aritmética y las magnitudes, no sólo por tradición, sino también porque las razones de magnitudes inconmensurables no son reconocidas como números” (Comin, 2000).
Hasta el siglo XVI,las razones de magnitudes inconmensurables no tenían el estatus de objetos matemáticos independientes de las magnitudes físicas. Los matemáticos no los consideraban como números susceptibles de sumar o multiplicar. Se habla de números obscuros, sordos, inexplicables, absurdos” (Comin, 2000).
Notables matemáticos de Grecia, viajaron por Egipto y Babilonia aprendiendo de estos pueblos, pero, a diferencia de éstos, los griegos utilizaron el método deductivo. De lo cual se concluye que la grandeza de la matemática griega tuvo su sustento en los aportes que brindaron los académicos egipcios y babilonios quienes, como ya se anotó, hicieron propuestas y se aventuraron a dar resultados como respuesta a necesidades surgidas de la cotidianidad.

Estos logros permiten analizar la pertinencia de la propuesta en el sentido que se hace de manera secuenciada, como la historia lo señala, que evita entrar en formalismos innecesarios para el nivel en donde se sitúa.

2.3 Modelo pedagógico

De acuerdo con la experiencia personal, el material bibliográfico consultado y el análisis y discusión que tuvo lugar durante nuestras sesiones del curso Filosofía e Historia de la Matemática no nos sorprende el "Juicio" que año tras año, o, semestre a semestre, se hace a la labor de docentes y estudiantes desde que se implementó la "Matemática Moderna" como propuesta curricular para la Educación Media en la década de los 70's, en donde el estudio formal de la Teoría de Conjuntos y de las Estructuras Algebraicas primó sobre la ejemplificación y el significado. Esta "peligrosa" práctica dejó sin piso la dinámica de la escuela primaria en donde otrora se desarrollaban procesos que incluían la operatoria como herramienta de apropiación y afianzamiento de conceptos a través de algoritmos que conducían a incipientes análisis que justificaban las propuestas de los estudiantes cuando resolvían problemas.

Fue así como los estudiantes, futuros docentes de primaria, que por ese entonces (década de los 70's) se prepararon en las Escuelas Normales, estudiaron Matemática de "Alto Nivel" sin significado, para trasmitir conocimientos básicos a sus alumnos en la escuela primaria. Sin una didáctica adecuada y sin una metodología sugerida por los programadores, responsables de las propuestas curriculares, la interacción se quedó sin un objeto claro de estudio, y como consecuencia, predecible, se creó una cortina espesa e infranqueable entre la práctica y la teoría.

Por lo anterior, se considera indispensable cerrar esta brecha a través de una propuesta didáctica que logre poner adecuadamente en escenario y al mismo nivel, la interpretación y la operatoria, que conduzca a la familiarización con el lenguaje y la simbología, sin desconocer los ambientes afectivos y emocionales de los educandos, a través de metodologías válidas apoyadas en Modelos Pedagógicos que privilegien el desarrollo más que el aprendizaje. Por esta vía se hace un llamado urgente a los mediadores para que identifiquen claramente los objetivos que se pretenden y que más allá de la intención, lleguen a la práctica.

> "El Sistema Educativo actual debe ser remplazado por un Sistema Formativo, esto, sin duda, cambiará el paisaje de la escuela".[13]

Resulta entonces pertinente recurrir a un modelo pedagógico integrador que reconozca el ser humano en toda su dimensión y que propenda por un mejoramiento permanente en lo académico y en lo social.

Atendiendo a esta reflexión y a la gran riqueza con la que, en materia de pedagogía se cuenta,se recurre al modelo de la Pedagogía Dialogante propuesto por ReuvenFeuerstein y expuesto e incorporado (en Colombia) por Julián De Zubiría Samper en el Instituto Merani pues, es allí en donde hay respuesta a gran parte de las inquietudes planteadas.

Veamos cuáles son sus planteamientos:

PRINCIPIOS PEDAGÓGICOS DE UNA PEDAGOGÍA DIALOGANTE[14].

Primer Principio Pedagógico

El fin de la educación no debería ser el aprendizaje sino el desarrollo.

Segundo Principio Pedagógico

La interestructuración. La educación siempre debe ser entendida como un proceso interestructurante; es decir, debe reconocer el papel activo tanto del mediador como del estudiante.

Tercer Principio Pedagógico

La conveniencia y necesidad de trabajar por competencias (aprendizajes de carácter integral, general, contextual que se expresan en realizaciones idóneas).

[13] Granada Andrés y Tirado Luz Adriana. Pedagogía Conceptual. 2004

[14] Hacia una Pedagogía Dialogante. Seminario de Modelos Pedagógicos. Julián De Zubiría Samper Director de la Innovación Pedagógica del Instituto Alberto Merani. Cali, noviembre de 2008.

La propuesta atiende los tres pilares del modelo pedagógico.

- *El fin de la educación no debería ser el aprendizaje sino el desarrollo*

  A través de las prácticas que se sugieren (ANEXO D) se propende por el desarrollo del significado más allá que por la adopción de algoritmos. Se proponen las actividades a través de un lenguaje sencillo, próximo a los estudiantes con problemas y situaciones reales, inmersas en la cotidianidad con el propósito de que sean los mismos niños y niñas quienes lleguen a sus propias conclusiones y poco a poco construyan los conceptos que constituyen la base de desarrollos posteriores.

- *La interestructuración*

  La dinámica que se establece en el ANEXO D. Descripción de actividades, destaca la importancia del trabajo mancomunado entre el mediador y los estudiantes, tiene en cuenta los entornos afectivos y sociales tanto de los niños y niñas, como de la escuela. Es así como los insumos materiales que se traen al aula son adecuados y de fácil acceso. La propuesta integra los saberes de los estudiantes con la cotidianidad y con los desarrollos académicos que se pretenden.

- *La conveniencia y necesidad de trabajar por competencias*

  A lo largo de la propuesta se evidencia que el propósito fundamental es el desarrollo de competencias de carácter contextual, que conectan los saberes propios de la escuela con la cotidianidad y con la adquisición de un lenguaje preciso y adecuado para expresar convenientemente ideas y posturas, lo cual, sin duda, contribuye al desarrollo de las competencias comunicativas.

3.Estructura de la guía: descripción de la propuesta deintervención

No hay en el mundo disciplina tan severa como la disciplina de la experiencia sometida a las pruebas de un desarrollo y dirección inteligente.
John Dewwey[15]

Los conceptos matemáticos tempranos e informales de los niños pueden servir como una base útil para la instrucción formal. Los educadores de matemáticas necesitan apreciar las matemáticas informales de los niños pequeños al entrar a la escuela, sus versiones sobre contar, sumar, restar y entender.Antes de entrar a la escuela, muchos de los niños desarrollan espontáneamente definiciones operativas de la suma y la resta. El razonamiento de los niños pequeños sobre estas operaciones tiene algunas limitantes básicas, pero refleja el principio de lo que podría ser una sólida comprensión de las ideas matemáticas básicas (Griffin y Case, 1998). La suma es la combinación de conjuntos y se cuentan los elementos para tener el total; la resta es quitar un subconjunto de un conjunto mayor y después contar los elementos que quedaron. A lo largo de los años de preescolar, los niños refinan estas estrategias, las hacen más eficientes y extienden su uso, de objetos concretos a objetos imaginarios. Con base en una serie de estudios realizados en la década de los 80, Case y Sandieson (1987) sostienen que los niños de cuatro años de edad generalmente difieren de los de seis en su comprensión conceptual de cantidad. Un niño típico de cuatro años puede resolver un problema que requiera la distinción entre objetos que sean bipolares: grandes contra pequeños, pesados contra ligeros, etcétera, y puede resolver problemas donde la única tarea sea contar pequeños grupos de objetos. Pero, a diferencia del típico niño de seis años, no ha combinado estas dos ideas en

[15] DEWEY JOHN. EXPERIENCIA Y EDUCACIÓN. Madrid. 2004 p 126

unaestructura conceptual central, donde la cantidad está representada por dos polos (por ejemplo, pesado y ligero) con un continuo de valores entre estos dos.[16]

El despunte de los Números Racionales en los escenarios académicos formales y cotidianos genera desacomodos pues rompe drásticamente la adhesión al conteo y a la conceptualización de cantidad alcanzada a través del uso de los números naturales. Es indiscutible su aporte al fortalecimiento del pensamiento matemático pues a la vez que incorpora formas, simbología y escrituras amplía contenidos y enfoques que enriquecen el lenguaje y la cotidianidad. Sin embargo, aún al interior de las aulas, se detecta el intento del intercambio de la formalidad, de las formas *"a sobre b"* por las formas decimales (escrituras con coma) tal vez por el uso, cada vez más generalizado, de herramientas tecnológicas.

Esta propuesta pretende que los estudiantes alcancen una significación básica de conceptos sobre la fracción que resulta válida frente al planteamientode Dewey,

> (…) la observación sola no es bastante. Hemos de comprender la *significación* de lo que vemos oímos y tocamos. Esta significación consiste en las consecuencias que resultaran cuando se actúe sobre lo que se ve.[17]

y que se relaciona con los aspectos del pensamiento concreto expuesto el inicio de la propuesta de intervención, dado que la población objetivo está conformada por niños entre los 8 y los 10 años. También se apoya en lo enunciado por Pozo,

> Aunque el niño capaz de usar las operaciones concretas puede ya ir más allá de las apariencias perceptivas por medio de la conceptualización, su pensamiento sigue ligado a lo concreto, a lo real, más que a lo posible. Diríamos que el pensamiento concreto trabaja con y sobre un dominio de objetos constituido por parámetros del mundo real.[18]

La propuesta no pretende desdibujar el concepto de número que tienen los niños, quienes en este nivel de desarrollo académico manipulan, con propiedad,el

---

[16]Numericthinking., en EagertoLearn: EducatingOurPreschoolers, Washington, NationalAcademyPress, 2000, pp. 200–204 [Traducción de la SEP con fines académicos, no de lucro].Sentido Numerico Y Pensamiento Algebraico. http://misecundaria.com/Main/SentidoNumericoYPensamientoAlgebraico
[17]DEWEY JOHN. EXPERIENCIA Y EDUCACIÓN. Madrid. 2004 p 106
[18] POZO JUAN IGNACIO. LA PSICOLOGÍA COGNITIVA Y LA EDUCACIÓN CIENTÍFICA. Madrid: Investigaciones en la enseñanza de ciencias – V1 (2), 1996 p.114

reconteo y la adición en el conjunto de los números naturales. Son los estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional el Hilo Conductor en cuanto a contenidos se refiere:

> *ESTÁNDARES DE CUARTO A QUINTO*
> *PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS*
>
> *ESTÁNDAR 2*: Analizar y explicar las distintas representaciones de un mismo número (naturales, fracciones, decimales, porcentajes).
> En la Educación Básica Primaria, se inicia la construcción del concepto de número. Para atender este concepto es necesario establecer las relaciones de equivalencia entre distintas representaciones de los números y los diferentes sistemas notacionales (naturales, fracciones y decimales).

[19]

No es posible, en el conjunto de los números naturales, dividir, o fraccionar, las unidades:

— Hay dificultades para definir el todo: *cuando una unidad, objeto o figura, la partimos en trozos iguales y nos referimos a uno o varios de esos trozos utilizamos las fracciones* (Lamadrid, 1987, p. 67).
— La propia indefinición del todo provoca errores entre los estudiantes a quienes se les presentan tareas de comparación de áreas utilizando *todos* del mismo tamaño. Esto produce que los alumnos desatiendan el tamaño de los *todos* de los que provienen las partes (Armstrong-Novillis, 1995, p. 16) y que, en consecuencia, se limiten a la comparación de partes que proceden de divisiones de unidades de distinto tamaño.
— Es necesario que los escolares fortalezcan sus conocimientos sobre los diferentessignificados de la fracción y que establezcan conexiones entre los mismos,puesto que si los niños aprenden solamente una interpretación de las fracciones tienen serias limitaciones para una sólida comprensión del número racional (Kerslake, 1986).[20]

[19] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. LA REVOLUCIÓN EDUCATIVA, ESTÁNDARES BÁSICOS DE MATEMÁTICAS Y LENGUAJE, EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA. República de Colombia. 2003. P 13
[20]GAIRÍN, José María. Aula, 10 EN: © Ediciones Universidad de Salamanca.
ISSN: 0214-3402. (1998) P. 41
NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS:
REFLEXIONES SOBRE LA INSTRUCCIÓN
Rationals positive numbers: reflections about the teaching
Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza

y es por esto que, en principio, en las acciones encaminadas al alcance del concepto, no se contempla la actividad de "romper" una unidad en *n* partes iguales.

La presentación, construcción y escritura de las razones, se vale de conjuntos finitos, de los que se toma una parte con el propósito de establecer al menos una relación entre los elementos del conjunto finito y la parte elegida.

Se emprende la presentación, construcción y escritura de las fracciones a través de la reconstrucción de la unidad con *n* partes iguales. Es ésta, una actividad equivalente a armar un rompecabezas. El propósito es lograr obtener, con esas *n* partes iguales, toda la unidad.

3.1 La razón[21]

LA NOCIÓN DE RAZÓN (GODINO Juan D. Matemáticas para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Universidad de Granada. 2004)

En el tema "Fracciones y números racionales" hemos visto que entre los usos de las fracciones figura el de razón, entendida, de manera genérica, como la comparación entre una parte y otra parte. Es importante, sin embargo, estudiar con más detalle el uso que se hace del término "razón", ya que no siempre es sinónimo de "fracción", lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes.

Hoffer (Hoffer, A. R. (1988).Ratios and proportional thiking. En Th. R. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8. Boston: Allyn and Bacon) explica claramente estas distinciones. La idea clave es que las fracciones son"cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta decero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cadauna de esas cantidades vienen expresadas mediante un número real y una unidad demedida.

El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:
- Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 jamones/145 euros no es una fracción.
- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.
- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7, o $4 \rightarrow 7$.
- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).
- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitudde una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.
- Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una "suma" de razones del siguiente modo.
2:5 + 3:7 = 5:12. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.
Ver Anexo D: sesión 1 y sesión 2.

---

[21] http://www.youtube.com/watch?v=5Lns22rB1Zw

La propuesta atiende esta magistral intervención, así como las observaciones, discusiones y conclusiones extractadas de textos, artículos, ponencias, experiencias y en general todo el material que fue necesario consultar para determinar el estado del arte, y es por esto que se presentan actividades que guardan correspondencia entre la edad cronológica, el desarrollo de pensamiento y el contexto social de los niños y niñas a quienes va dirigida.

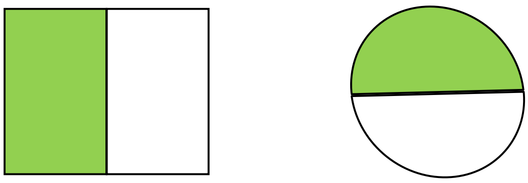
Se incursiona en la presentación de la razón como la relación parte - parte que se establece entre conjuntos discretos para conducir al reparto proporcional a través de experiencias en el aula, la cotidianidad y problemas diseñados siempre atendiendo la cercanía de sus contenidos al contexto de los estudiantes y su desarrollo de pensamiento sin desatender la formalidad de la disciplina e incorporando un modelo pedagógico integrador, como se muestra en el ANEXO D –La Razón-

3.2 La fracción como parte - todo[22]

Se propone iniciar con el reconocimiento de los saberes que los estudiantes han alcanzado en lo referente a cantidad a través del recuento de objetos utilizando los números naturales.

A diferencia del tipo de elementos utilizados para abordar el concepto de razón (contexto discreto), se presentan figuras geométricas cuya área (contexto continuo) será dividida en trozos congruentes entre sí con el propósito de hacer, en principio, el conteo de las mismas y establecer un "nuevo" concepto de cantidad, siempre relacionada con un "todo" (unidad).

Se espera que los niños y niñas que se involucren en esta propuesta alcancen una conceptualización sólida; para ello, no siempre se utilizan formas invariantes, por ejemplo, para representar un medio$\left(\frac{1}{2}\right)$ (media unidad) se utilizan círculos y rectángulos como unidades de referencia. No hay una unidad absoluta.



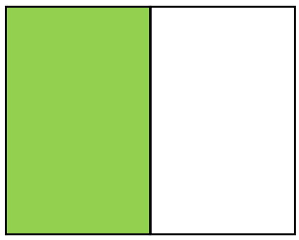
Se plantea entonces como sigue:

- Reconocimiento de la unidad
- Presentación dela unidad a partir de las partes
- Presentación de las partes a partir de la unidad

[22]http://www.youtoube.com El hombre que calculaba. El problema del reparto de los camellos. Los 35 camellos.

- Transversalmente se utiliza la representación, la verbalización, se dice con palabras del lenguaje corriente el nombre de las partes (medios, tercios,…), luego se escribe en español y finalmente se llega a la escritura formal (simbolización) (ANEXO D. - La Fracción como parte – todo-)

Por ejemplo:



La mitad, de ese rectángulo, que es la unidad de referencia.

Un medio de la unidad de referencia

$$\frac{1}{2}$$

3.3 Fracciones que representan más que una unidad

Atendiendo al desarrollo de pensamiento de niños y niñas en este grado de escolaridad y al trabajo que hasta este punto se ha realizado, se utiliza el material diseñado para mostrar unidades completas y partes de ellas con el propósito de ampliar tanto la manipulación como la verbalización, la escritura y el concepto de las fracciones sin reducirlo meramente a porciones menores que una unidad.

Se reconstruye más de una unidad con porciones congruentes (medios, tercios, cuartos…de la unidad de referencia) y de la misma manera se propone la división de más de una unidad en partes congruentes para abrir espacio a la concepción, escritura y conceptualización de fracciones en las que es mayor el numerador que el denominador.

Se recomienda especial cuidado con la utilización de los números mixtos puesto que pueden suscitar intercambios como: $2\frac{1}{2}\ significa\ 2\ multiplicado\ por\ \frac{1}{2}$ en cuyo caso estaríamos refiriéndonos a la unidad y no a $dos\ enteros\ y\ un\ medio,$ $2+\frac{1}{2}$ en donde nos referimos exactamente a $\frac{5}{2}$ (ANEXO D. -Fracciones que representan más que una unidad-)

Aunque la recomendación anterior sugiere la presencia de la relación de equivalencia y de la adición de fracciones con igual denominador, no pretende insertar estos conceptos, son éstos, los objetos de estudio posteriores. Sólo se sugiere la construcción, visualización y conceptualización de fracciones

$$\frac{p}{q}\ , \qquad con\ \ p > q.$$

3.4 Relación de Equivalencia. Relación de Orden.

Es suficiente para los niños y niñas de tercer grado de educación básica primaria, ver la equivalencia de las fracciones a través de la comparación de las partes de las unidades que ellos mismos cubren con el material que se está manipulando o dividen con unidades de referencia que ellos mismos construyen.

Sin embargo, se debe echar mano de definiciones formales de los contenidos matemáticos.

1. $1 \epsilon\, Q^+ \cup \{0\}$ y ocurre que para todo $\frac{a}{b}\ \epsilon\ Q^+ \cup \{0\}$se cumple que $\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$

   Hemos estudiado que $\frac{n}{n} = 1\ para\,todo\ n\,\epsilon\ N\ \ con\ \ n \neq\ 0.$

   Entonces:

$$\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b} \times \frac{n}{n} = \frac{a}{b},$

$$\frac{a \times n}{b \times n} = \frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $4 = 2 \times 2\ ,\ y\,,\ 6 = 3 \times 2$

$$\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{3}$$

2. Se dice que dos fracciones $\frac{a}{b}\ y\ \frac{c}{d}$ son equivalentes; si y sólo si $a\,d = b\,c$

$\frac{a}{b}$

$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$son representaciones de un mismo objeto en el sentido que una misma unidad puede dividirse en $b\ ,o,\ d$partes que son congruentes entre sí

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$si existen $p\,,q$ primos relativos y dos números naturales $m\,,n$ tales que

$$a = p\,m \qquad c = p\,n$$
$$b = q\,m \qquad d = q\,n$$

Ejemplo:

$$\frac{24}{16} = \frac{12}{8},\ \ existen\ \ 2\ y\ 3\ \ primos\ relativos.\ 4\ y\ 8\ son\ enteros\ tales\ que:$$

$$24 = 3 \times 8 \qquad 12 = 3 \times 4$$
$$16 = 2 \times 8 \qquad 8 = 2 \times 4$$

Entonces: $\frac{3 \times 8}{2 \times 8} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4}$

Con el material disponible, las actividadesrealizadas, la conceptualización de equivalencia entre fracciones y haciendo uso del concepto de orden en los números naturales que niños y niñas han alcanzado, se incursiona con comodidaden la relación de orden entre las fracciones.

Para $\frac{a}{b}, \frac{m}{p} \epsilon Q^{+} \cup \{0\} \qquad si \ \frac{a}{b} \leq \frac{m}{p}, \ ocurre\ que, a\, p \leq b\, m$

- Se inicia comparando fracciones con el mismo denominador, lo cual se traduce sencillamente a la relación de orden establecida en N. Por ejemplo, tomando $\frac{2}{5}\ y\ \frac{3}{5}$ de una misma unidad; $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$ porque $2 < 3$ y se cumple que $2 \times 5 < 5 \times 3$

- Sigue la comparación de fracciones con numerador 1 y diferente denominador, con esta práctica se persigue que los estudiantes visualicen el tamaño de las porciones de una misma unidad. Por ejemplo $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ porque la porción que representa la tercera parte de una unidad es más pequeña que la porción que representa la mitad de esa misma unidad. $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$y se cumple que $1 \times 2 < 1 \times 3$

- A continuación, se comparan fracciones de una misma unidad con igual numerador, no necesariamente 1, y diferente denominador. Por ejemplo $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ porque, en $\frac{3}{5}$ se eligen tres porciones (quintos) que son más pequeños que los cuartos y se cumple que $3 \times 4 < 5 \times 3$ (por

comparación, manipulando estas partes de una misma unidad). O a través de la relación de equivalencia: $\frac{3}{5} \sim \frac{12}{20}$ y $\frac{3}{4} \sim \frac{15}{20}$.
Se evidencia entonces que $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ puesto que $\frac{12}{20} < \frac{15}{20}$

- Finalmente, se comparan fracciones con distintos numerador y denominador. Por ejemplo, eligiendo $\frac{2}{3}\ y\ \frac{3}{4}$ de una misma unidad, se tiene que $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ y se cumple que $2 \times 4 < 3 \times 3$ (por comparación, manipulando estas partes de una misma unidad). O a través de la relación de equivalencia: $\frac{2}{3} \sim \frac{8}{12}$ y $\frac{3}{4} \sim \frac{9}{12}$.
Se evidencia entonces que $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ puesto que $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$

Se recomienda:

- Hacer énfasis en los conceptos de tamaño y de cantidad.
- Evitar que los niños y niñas caigan en errores como $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ puesto que $2 < 4$
- Establecer que entre más pequeño sea el trozo, mayor es el número de trozos que se requieren para completar la unidad.
(ANEXO D. -Relación de Equivalencia. Relación de Orden-)

3.5 Adición de fracciones con igual denominador

El avance académico de los niños y niñas de tercer grado de educación básica primaria, presume cierta comprensión significativa y alguna mecanización en lo referente a la adición de números naturales. Se han desarrollado prácticas válidas[23] en la solución de problemas con enunciado, que involucran esta operación.

Desde esta óptica, se abordará la adición de fracciones con igual denominador. Se busca que sea ésta una actividad similar a los procesos desarrollados y alcanzados con números naturales, agradable y que no aleje al niño del proceso sino que, por el contrario, lo convoque y lo motive a cuestionar y a indagar.ANEXO D. Adición de fracciones con igual denominador.

Se presentan dos problemas en los que se busca reconstruir la unidad a partir de la adición de fracciones presentadas como partes de un mismo todo:

1. Los tapetes de Juan Manuel. Se reconstruye la unidad realizando la adición de fracciones con igual denominador.
2. La encuesta. Se reconstruye la unidad realizando la adición de fracciones con diferente denominador, que con el apoyo de la relación de equivalencia, se traduce a la adición de fracciones con igual denominador.

Se debe recordar que sólo es posible efectuar la adición de fracciones con igual denominador. Es, por lo tanto,indispensable hacer uso adecuado de la relación de equivalencia con el propósito de alcanzar que los sumandos que tienen distinto denominador sean, ahora, equivalentes a sumandos con el mismo denominador.

[23]Prácticas que facilitan la puesta en escenario de la adición de fracciones con igual denominador, puesto que suponen un nivel aceptable de interpretación.

Se plantean, luego, dos problemas que deben resolverse a través de la adición de fracciones de un mismo todo con distinto denominador, pero que no persiguen, exclusivamente, la reconstrucción de la unidad:

1. Refrigerios.
2. Latas de pintura.

(ANEXO D.- Adición de Fracciones con igual denominador-)

3.6 De la razón a la fracción

Se hace énfasis en la escritura de razones estableciendo, en este caso, la razón que relaciona las longitudes de dos segmentos.

A continuación, se plantea la posibilidad de escribir las fracciones que corresponden a cada una de las longitudes como partes de un mismo todo.

El problema del grupo musical que se diseñó, resume los temas que le anteceden: la razón, la fracción como parte-todo, adición de fracciones con igual denominador, equivalencia de fracciones, relación de orden.

Se muestran los logros obtenidos en el intento de implementar la propuesta en el aula con grupos de estudiantes de grado quinto.

También se plantea una situación a través de la cual se espera que ahora, con mayor propiedad y claridad niños y niñas establezcan tanto las razones que relacionan las partes de un conjunto de puntos como las fracciones que describen la relación parte-todo.

(ANEXO D. –De la Razón a la Fracción-)

4. Conclusiones y recomendaciones

4.1Conclusiones

La puesta en escena de la propuesta, apoyada en el modelo pedagógico expuesto “Hacia una Pedagogía Dialogante”, constituye una estrategia metodológica válida en el proceso de conceptualización. Ya que es una propuesta didáctica fundamentada en el análisis disciplinar y didáctico del concepto de número racional y sus contextos de significación para los estudiantes de tercero y cuarto grados de educación básica primaria. Alcanzando, de esta manera, el objetivo general que se trazó.

Se logra, otro de los objetivos pues es ésta una estrategia didáctica para la educación básica primaria en donde se privilegia el concepto y el significado a la vez que facilita la manipulación de la fracción como número, como razón y como relación parte-todo.

Es importante destacar la participación de los cuatro actores que se reúnen para dar vida al desarrollo de las actividades y la aprehensión de los conceptos: los estudiantes, el mediador, la propuesta misma y el modelo pedagógico.

Los estudiantes, quienes, a través de una permanente motivación son inmersos en la propuesta con de actividades agradables que logran conectar la cotidianidad con las prácticas académicas.

El papel del mediador,como lo señala Feuerstein, es fundamental, consiste en intervenir en los procesos de estructuración y reestructuración continua propios de los niños y niñas. Es a los mediadores a quienes, exactamente, la propuesta dirige el análisis de lo disciplinar y la sugerencia de utilizar el aporte histórico y el análisis de estudios relacionados con los temas tratados; logrando de esta manera dos de los objetivos planteados.

La propuesta reconoce la participación de los dos actores anteriores. Tiene en cuenta tanto las expectativas, el desarrollo cronológico y epistemológico de niños y niñas como la formación y compromiso de los mediadores.
El modelo Pedagógico que sustenta y dinamiza el quehacer en el aula, integra la participación de las tres entidades a través de sus tres postulados:

- El fin de la educación no debería ser el aprendizaje sino el desarrollo.
- La interestructuración..
- La conveniencia y necesidad de trabajar por competencias

La propuesta es una alternativa para el enfoque y direccionamiento de los conceptos que pretende situar. Busca abrir puertas al análisis, discusión y concertación alrededor de los mismos.

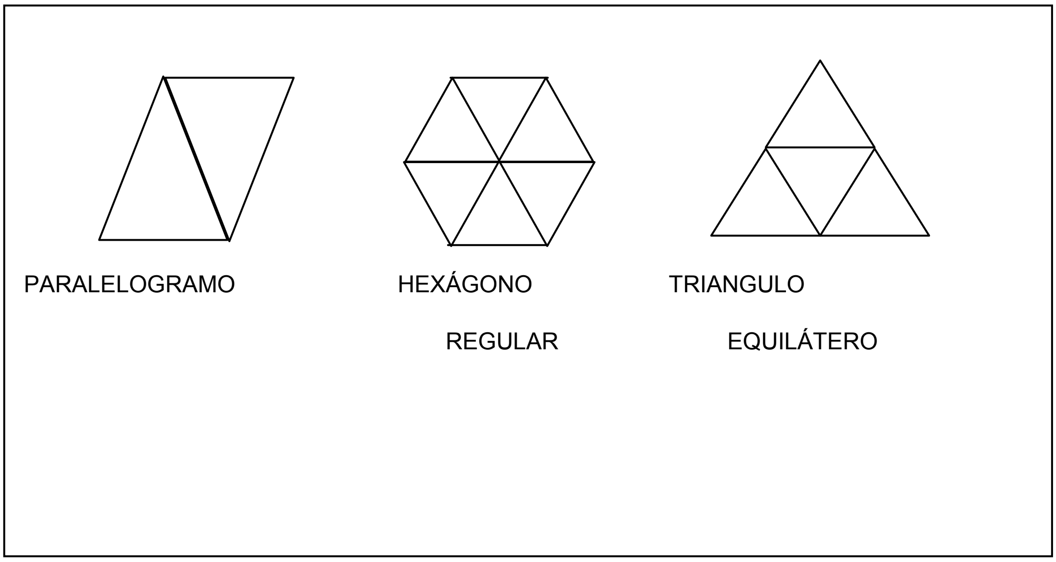
A través del estudio y las experiencias que se plantean, se destacan dos elementos fundamentales: La razón y la equivalencia; no resulta atrevido declarar que son éstos, los pilares fundamentales para el estudio de la Fracción.

4.2 Recomendaciones

1. Ante el delgado y casi invisible velo que separa los conceptos de razón y la fracción como parte de un todo, urge la fundamentación sólida de los mediadores. Una buena práctica para este propósito es el abordaje de los conceptos partiendo de situaciones problémicas que permitan discusiones, reflexiones y acuerdos entre la experimentación y la teoría.

2. Incluir en la cotidianidad académica no sólo la práctica al interior de las aulas sino el diálogo e intercambio de saberes con los pares a través de análisis pedagógicos constructivos, propuestas didácticas y metodológicas que impliquen el estudio y la investigación (formativa en principio).

3. Diseñar e incorporar material didáctico que facilite y promueva procesos de redescubrimiento.
   Por ejemplo, construir fracciones representadas con polígonos diferentes de los rectángulos y de los círculos.



A. Anexo: Prueba diagnóstica incluyente

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La siguiente prueba diagnóstica establece el criterio de inclusión de un grupo de estudiantes de quinto de primaria, con el propósito de establecer el nivel de conceptualización alcanzado previamente en cursos de matemáticas de los grados tercero y cuarto de básica primaria en cuanto a:

- Interpretación de la fracción como parte de una unidad
- Interpretación de la fracción como parte de un todo
- Interpretación de la razón como relación entre cantidades
- Manejo de las operaciones de adición y multiplicación
- Porcentaje
- Análisis, interpretación y resolución de un problema

El cuestionario que presento a continuación incluye planteamientos puntuales sobre cada uno de los temas indicados en el párrafo anterior.

INEM FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Agosto 26 de 2011

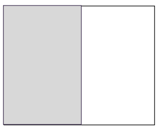
Por favor escribe tu nombre completo y tu edad sobre las rayas.

NOMBRE: ____
EDAD: ______ años.

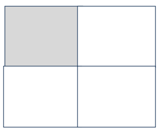
A continuación encontrarás 5 preguntas relacionadas con las fracciones. Debes leerlas con mucha atención y concentración para que las respondas de la mejor manera utilizando tus conocimientos y destrezas.

PREGUNTA 1. REPRESENTACIONES GRÁFICAS.
Observa los gráficos de la izquierda y relaciónalos con la lista de números de la derecha

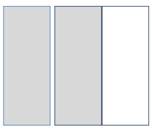
$$\frac{1}{4}$$



1



$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{1}{2}$$

PREGUNTA 2. GRUPO DE MUSICA

Seis estudiantes de un curso pertenecen al grupo musical del colegio.

1. Ana Valencia toca un instrumento de cuerdas
2. Hugo Rodríguez toca un instrumento de percusión
3. Jaime Ayala interpreta la guitarra
4. Leidy Mora canta
5. Jonathan Arias toca un instrumento de cuerdas
6. Mauricio Rojas toca la tambora

En la tabla que encuentras a continuación, está la información.

	Toca un instrumento de cuerdas	Toca un instrumento de percusión	Canta
Ana Valencia	SI	NO	NO
Hugo Rodríguez	NO	SI	NO
Jaime Ayala	SI	NO	NO
Leidy Mora	NO	NO	SI
Jonathan Arias	SI	NO	NO
Mauricio Rojas	NO	SI	NO

Debes elegir y señalar sólo una de las opciones que hay en las dos preguntas relacionadas con el grupo musical.

- Cuál de las siguientes expresiones se puede utilizar para señalar cuántos estudiantes interpretan un instrumento de cuerdas:

A. $La\ tercera\ parte\ \ de\ \ 6$
B. $La\ sexta\ parte\ \ de\ \ 6$
C. $La\ mitad\ \ de\ \ 6$
D. $La\ cuarta\ parte\ \ de\ \ 6$

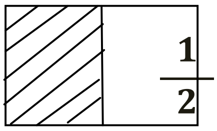
- Cuál de las siguientes expresiones se puede utilizar para señalar cuántas niñas hay en el grupo musical:

A. $La\ cuarta\ parte\ \ de\ \ 6$
B. $Los\ cinco\ sextos\ \ de\ \ 6$
C. $La\ mitad\ \ de\ \ 6$
D. $La\ tercera\ parte\ de\ \ 6$

PREGUNTA 3. LA ENCUESTA

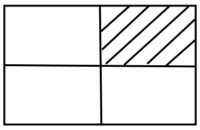
Una encuesta realizada en un curso se hizo de la siguiente manera:

Antes del descanso se entrevistó a la mitad de los estudiantes del curso



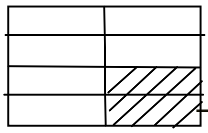
$\frac{1}{2}$

Durante el descanso, se entrevistó a la cuarta parte del total del curso



$\frac{1}{4}$

Después del descanso se entrevistó a los dos octavos del total del curso



$\frac{2}{8}$

¿Qué parte del total de los estudiantes del curso falta por entrevistar?

Escribe aquí tu respuesta.

PREGUNTA 4. ATLETISMO

En los juegos escolares, Elías participó en la carrera de los 100 metros, que es conocida como La Prueba Reina del Atletismo. Cuando sólo había recorrido 20 metros, Elías sintió que le faltaba el aire y se retiró de la pista.

- Elías había recorrido:(debes elegir sólo una de las opciones)

A. La cuarta parte del total de la distancia
B. La tercera parte del total de la distancia
C. La quinta parte del total de la distancia
D. El 10% del total de la distancia

- A Elías le faltaba recorrer 80 metros, los cuales representan:(debes elegir sólo una de las opciones)

A. Las dos cuartas partes del total de la distancia
B. El 80% del total de la distancia
C. La quinta parte del total de la distancia
D. El 20% del total de la distancia

PREGUNTA 5. HELADOS

Una caja contiene 15 helados: 4 son de mora, 6 son de vainilla, 2 son de limón y el resto son de guayaba.

- La razón entre la cantidad de helados de mora y la cantidad total de helados de vainilla es

Ahora eres tú quien debe escribir la razón

- La razón entre la cantidad de helados de vainilla y la cantidad de helados de mora es ______________
- La razón entre la cantidad de helados de limón y la cantidad de helados de guayabaes
- La razón entre la cantidad de helados de guayaba y la cantidad de helados de mora es

B. Anexo:Evidencia de la prueba

Encontramos aquí una de las pruebas que el grupo seleccionado de estudiantes de grado quinto respondió.

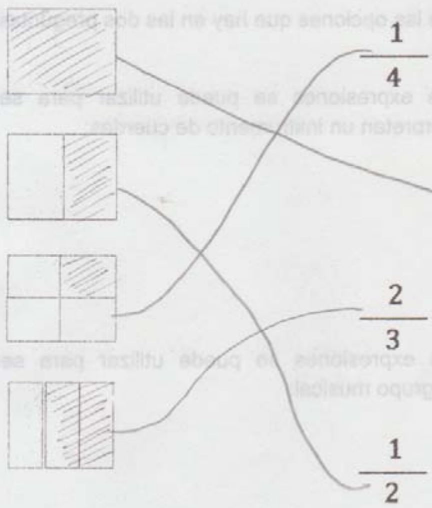
INEM FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Agosto 26 de 2011

Por favor escribe tu nombre completo y tu edad sobre las rayas.

NOMBRE: Sebastian Torres Varela
EDAD: 11 años.

A continuación encontrarás 5 preguntas relacionadas con las fracciones. Debes leerlas con mucha atención y concentración para que las respondas de la mejor manera utilizando tus conocimientos y destrezas.

PREGUNTA 1. REPRESENTACIONES GRÁFICAS.
Observa los gráficos de la izquierda y relaciónalos con la lista de números de la derecha



PREGUNTA 2. GRUPO DE MUSICA

Seis estudiantes de un curso pertenecen al grupo musical del colegio.

1. Ana Valencia toca un instrumento de cuerdas
2. Hugo Rodríguez toca un instrumento de percusión
3. Jaime Ayala interpreta la guitarra
4. Leidy Mora canta
5. Jonathan Arias toca un instrumento de cuerdas
6. Mauricio Rojas toca la tambora

En la tabla que encuentras a continuación, está la información.

	Toca un instrumento de cuerdas	Toca un instrumento de percusión	Canta
Ana Valencia	SI	NO	NO
Hugo Rodriguez	NO	SI	NO
Jaime Ayala	SI	NO	NO
Leidy Mora	NO	NO	SI
Jonathan Arias	SI	NO	NO
Mauricio Rojas	NO	SI	NO

Debes elegir y señalar sólo una de las opciones que hay en las dos preguntas relacionadas con el grupo musical.

- Cuál de las siguientes expresiones se puede utilizar para señalar cuántos estudiantes interpretan un instrumento de cuerdas:

A. *La tercera parte de 6*

B. *La sexta parte de 6*

C. *La mitad de 6*

D. *La cuarta parte de 6*

- Cuál de las siguientes expresiones se puede utilizar para señalar cuántas niñas hay en el grupo musical:

A. *La cuarta parte de 6*

B. *Los cinco sextos de 6*

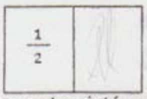
C. *La mitad de 6*

D. *La tercera parte de 6*

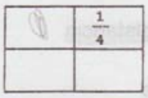
PREGUNTA 3. LA ENCUESTA

Una encuesta realizada en un curso se hizo de la siguiente manera:

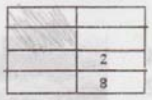
Antes del descanso se entrevistó a la mitad de los estudiantes del curso



Durante el descanso, se entrevistó a la cuarta parte del total del curso



Después del descanso se entrevistó a los dos octavos del total del curso



¿Qué parte del total de los estudiantes del curso falta por entrevistar?

Escribe aquí tu respuesta.

PREGUNTA 4. ATLETISMO

En los juegos escolares, Elías participó en la carrera de los 100 metros, que es conocida como La Prueba Reina del Atletismo. Cuando sólo había recorrido 20 metros, Elías sintió que le faltaba el aire y se retiró de la pista.

- Elías había recorrido: (debes elegir sólo una de las opciones)

A. La cuarta parte del total de la distancia
B. La tercera parte del total de la distancia
C. La quinta parte del total de la distancia
D. El 10% del total de la distancia

- A Elías le faltaba recorrer 80 metros, los cuales representan: (debes elegir sólo una de las opciones)

A. Las dos cuartas partes del total de la distancia
B. El 80% del total de la distancia
C. La quinta parte del total de la distancia
D. El 20% del total de la distancia

PREGUNTA 5. HELADOS

Una caja contiene 15 helados: 4 son de mora, 6 son de vainilla, 2 son de limón y el resto son de guayaba.

- La razón entre la cantidad de helados de mora y la cantidad total de helados que contiene la caja es 4: 15
- La razón entre la cantidad de helados de vainilla y la cantidad total de helados que contiene la caja es 6: 15

Ahora eres tú quien debe escribir la razón.

- La razón entre la cantidad de helados de limón y la cantidad total de helados que contiene la caja es 7:40
- La razón entre la cantidad de helados de guayaba y la cantidad total de helados que contiene la caja es 3:15

C. Anexo: Un poco de historia

Algunos contenidos, referentes al tema, del material aportado por la profesora Clara Helena Sánchez

Se puede mirar el origen de la matemática en la necesidad del hombre de responder a la pregunta ¿Cuántos? La respuesta a esta pregunta está atada a dos áreas de la matemática, las más antiguas quizás, la aritmética y la geometría. La aritmética que permitirá responder a la pregunta ¿cuántos hay? Y la geometría en la que es necesario responder a las preguntas ¿Qué forma tiene y cuánto mide? [24]

En geometría podemos encontrar tanto razones teóricas como prácticas para justificar sus orígenes. Las razones prácticas, según Heródoto, se hallan en Egipto ya que era necesario trazar los linderos de las tierras cada vez que el río Nilo las inundaba. Con base en esos linderos había que pagar los impuestos. De esta manera se requería tanto la geometría como la aritmética para hacer los respectivos cálculos.

Por lo anterior se tiene entonces que los conceptos fundamentales de la matemática en la antigüedad fueron los de número, magnitud y forma. Ahora bien, los pitagóricos dieron un salto cualitativo al estudiar las propiedades de los números, independientemente de su posible utilidad, y al hacer las primeras demostraciones rigurosas en matemáticas.

El concepto de magnitud adquirió importancia particular. Este es un concepto indefinido en la antigüedad que servía para referirse a las longitudes, las áreas, los volúmenes, el tiempo, los pesos, etc., esto es, todo aquello que fuera contable o medible. Las magnitudes se clasificaron en dos grandes tipos: **discretas** y **continuas**. Se llamaban continuas aquellas que podían dividirse de manera indefinida, y discretas las que no,

[24] El surgimiento de la teoría de conjuntos, Clara Helena Sánchez B.Profesora Titular Departamento de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia

como es el caso de un conjunto con un número finito de elementos. En el concepto de magnitud está de alguna manera involucrado el infinito como un proceso que nunca termina. Zenón mostrará con sus paradojas el conflicto que surge con esta noción.

[25]Los pitagóricos identificaban los números con la geometría; el encontrar razones inconmensurables marcó un rompimiento entre estas disciplinas y la geometría comenzó a ser privilegiada sobre la aritmética.Fue Eudoxio de Cnido (408-355 a. C.) quien con su noción de magnitud y su teoría de las proporciones ata las nociones de razón y proporción a la geometría, permitiendo extender pruebas que consideraban magnitudes conmensurables a problemas que contemplaban las magnitudes inconmensurables.

El concepto de magnitud no fue claramente definido por Eudoxio, servía para entidades como longitudes, áreas, volúmenes y tiempo. Se diferenciaba de los números por el hecho de considerarse a las magnitudes continuas y a los números como discretos, al saltar de uno a otro. Recuérdese que para los antiguos griegos, números eran lo que hoy llamamos naturales (sin contar el cero).La teoría de las proporciones de Eudoxio se encuentra en el libro V de los Elementos de Euclides. Así:

"Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta" [Vera, 1970 Vol. I].

Modernamente la definición anterior se expresa como sigue:
Dos razones a/b y c/d son iguales si dados dos enteros cualesquiera m, n se tiene que
i) si $ma \geq nb$ entonces $mc \geq nd$
ii) si $ma \leq nb$ entonces $mc \leq nd$

---

[25]XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística CONSTRUCCIÓN DE LOS REALES
Clara Helena Sánchez B. Profesora Asociada
Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia
Universidad Pedagógica Nacional, Santafé de Bogotá, Diciembre de 1997

Idea que usará Dedekind dos mil años después para definir los números irracionales. La teoría de Eudoxio permitió grandes avances en la geometría y trajo como consecuencia, hacer de la geometría la base de casi toda la matemática rigurosa por dos mil años.

Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persistió hasta la época medieval.

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, famoso, entre otras cosas por la serie de Fibonacci, introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones.

A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy.

A finales del siglo XVI, SimonStevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los escribía de una forma complicada; así para 456, 765 escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3).

A principios del siglo XVII, los números decimales ya aparecieron tal y como los escribimos hoy, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal, en el siglo XVIII, concretamente en 1792.

D. Anexo: Propuesta de actividades

La Razón

SESIÓN 1

Construcción de una razón relacionando partes de un conjunto finito de elementos.

ACTIVIDAD

PASO 1. Una caja contiene dos bolas: una blanca y una roja.

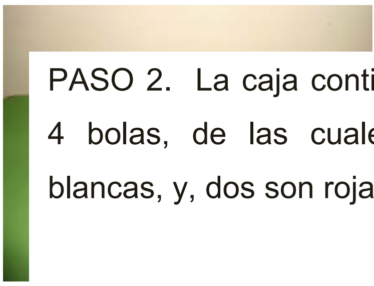
Se propone al docente mediador, allegar este material a la clasey conducir a niños y niñas a la construcción de la razón que da cuenta de la relación entre la cantidad de bolas blancas y la cantidad de bolas rojas que contiene la caja: "unabola de las dos que contiene la caja es blanca y la otra es roja: " a través de observaciones como:

- ¿Cuántas bolas hay en la caja?
- ¿Cuántas bolas son blancas?
- ¿Cuántas bolas son rojas?

Se espera que niños y niñas verbalicen con la expresión

"Una de las dos bolas es blanca y la otra es roja".

Lo cual conduce a la razón "uno a uno" que se simbolizará así:



PASO 2. La caja contiene ahora 4 bolas, de las cuales, 2 son blancas, y, dos son rojas.

El docente, mediador, acompaña a niños y niñasen la construcción de la razón que da cuenta de la relación entre la cantidad de bolas blancas y la cantidad de bolas rojas que contiene la caja: “dos bolas de las cuatro que contiene la caja son blancasy las otras dos bolas son rojas” a través de observaciones como:

- ¿Cuántas bolas hay en la caja?
- ¿Cuántas bolas son blancas?
- ¿Cuántas bolas son rojas?

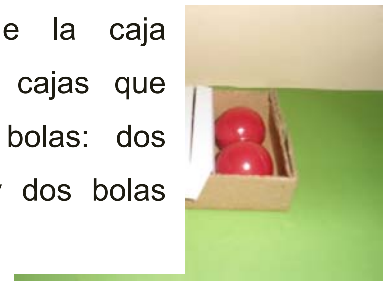
Se espera que niños y niñas verbalicen con la expresión

“Dos de las cuatro bolas son blancas, las otras dos son rojas”.

Lo cual conduce a la razón “dos a dos” , que se simbolizará así:

Intuitivamente niños y niñas se aproximan alconcepto de equivalencia[26] para construir, más adelante, la proporción.

PASO 3. Dentro de la caja pondremos ahora, dos cajas que contienen, cada una, dos bolas: dos blancas una de ellas y dos bolas rojas la otra.



El propósito es que niños y niñas, libremente, establezcan las razones

- clasificando las dos cajas, y,
- clasificando las bolas

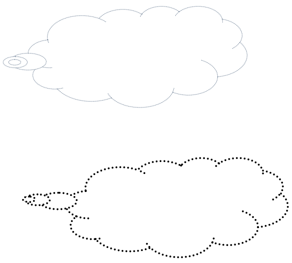
Se sugiere desarrollar prácticas similares utilizando seis bolas:

- Iniciar con cuatro bolas rojas y dosbolas blancas, para establecer la razón . Luego, poner en la caja 8 bolas rojas y cuatro bolas blancas para establecer la razón . Intuitivamente niños y niñas se aproximan a la consolidación del concepto de equivalencia para construir, más adelante, la proporción.

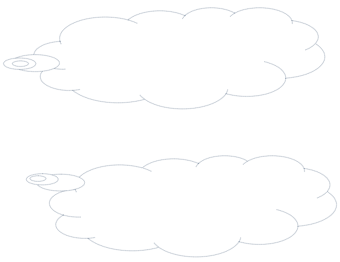
[26] Al docente mediador: La equivalencia de las expresiones se basa en lo que el niño intuye, la mitad del total de las bolas que contiene la caja son de un color y la otra mitad del otro color

- Seguir con ocho bolas, pero ahora utilizando tres colores así: tres bolas verdes, cuatro bolas rojas y una bola blanca, para construir, por esta ruta las razones

- que relaciona la cantidad de bolas verdes con la cantidad de bolas rojas.
- que relaciona la cantidad de bolas blancas con la cantidad de bolas verdes



Intuitivamente niños y niñas se aproximan al concepto de proporción utilizando una caja que contiene seis bolas verdes, ocho bolas rojas y dos blancas.



Se establecen las razones entre:

La cantidad de bolas verdes y la cantidad de bolas rojas.

La cantidad de bolas blancas y la cantidad de bolas verdes.

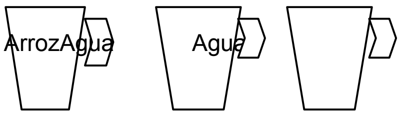
Y se establecen ahora las proporciones

y

SESIÓN 2.

SITUACIONES QUE INCLUYEN RAZONES

1.



Las abuelas aseguran que para preparar el arroz de la mejor manera se debe utilizar el doble de agua que de arroz, por ejemplo, para preparar un pocillo de arroz se deben agregar dos pocillos de agua.

La razón que relaciona la cantidad de arroz con la cantidad de agua es (una medida de arroz por dos medidas de agua)

Se pide ahora a los niños y niñas que escriban las razones que relacionan la cantidad de arroz con la cantidad de agua correspondientes a:

La abuela va a preparar 3 pocillos de arroz para el almuerzo

La mamá de Juliana cocina semanalmente 7 pocillos de arroz

Diariamente, en un restaurante se preparan 25 pocillos de arroz

El docente mediador, hace el acompañamiento para establecer la equivalencia de estas razones

2. Para la práctica de deportes, el profe Jaime llevó seis balones. Dos de los cuales son de futbol, tres de básquet, uno de voleibol pero no llevó ninguno de microfútbol.

La razón entre los balones de futbol y los balones de básquet es __________________

La razón entre los balones de básquet y los balones de microfútbol es ______________

La razón entre los balones de voleibol y los balones de fútbol es __________________

3. 

Veamos una información comercial que permite la aplicación del concepto, al establecer la relación entre dos cantidades.

En la etiqueta de un tarro de MILO se leen las instrucciones para preparar la bebida

Se sugiere al docente mediador preparar la bebida con los niños y niñas y direccionar el desarrollo del problema de la siguiente manera:

Trabajar con la información que relaciona la cantidad de cucharadas con la cantidad de vasos de leche

Agrega
2 cucharadas
a un vaso de leche

Para ti, ¿cuál es la razón entre la cantidad de cucharadas y los vasos de leche para preparar esta bebida?

$cantidad\ \ de\ \ cuharadas: cantidad\ de\ vasos\ de\ leche$

Encierra tu respuesta en un óvalo

$$Dos\ \ a\ \ uno\quad 2:1, \text{o},\qquad Uno\ \ a\ \ dos\quad 1:2$$

- Si quieres preparar dos vasos de MILO:
- ¿Cuántas cucharadas necesitas?
- ¿Cuál es la razón entre la cantidad de cucharadas y los vasos de leche para preparar la bebida?

Escribe aquí tu respuesta

$cantidad\ \ de\ \ cuharadas: cantidad\ de\ vasos\ de\ leche$

- Prepara ahora tres vasos de MILO

Escribe aquí la razón

$cantidad\ \ de\ \ cuharadas: cantidad\ de\ vasos\ de\ leche$

Se sugiere al docente mediador, proponer otras alternativas.

Problemas de aplicación se pueden plantear al examinar los empaques de algunos productos de los que consumen los estudiantes para diseñar actividades similares a la que se presentó.

Lafracción como parte - todo

Se utilizará para este propósito el material *"Fraccionarios con representación numérica"*(diseñado y distribuido por la compañía Royter Ltda.)

SESIÓN 1

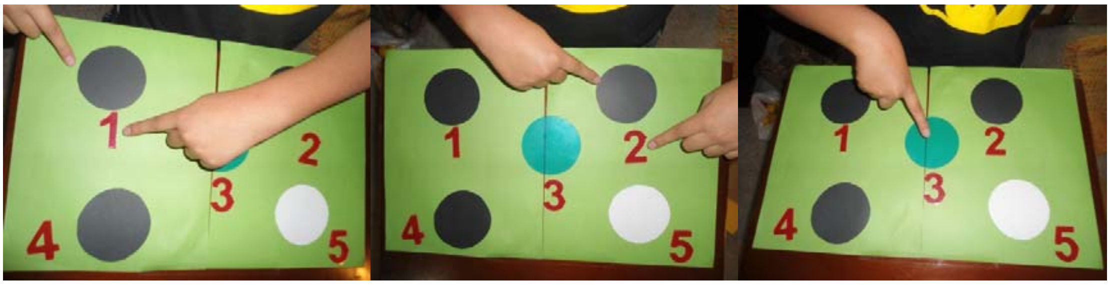
Se trabajará en esta primera sesión, el reconocimiento de la unidad[27] y su construcción a partir de trozos congruentes.

RECONOCIMIENTO DE LA UNIDAD

PASO 1.

Entregar a cada uno de los niños y niñas un círculo, éste representará la unidad

PASO 2. Entregar ahora otros círculos con el propósito de que cuenten la cantidad de círculos (unidades) que tiene ahora: uno, dos, tres… y a través de esta actividad identifique plenamente la unidad



[27]http://www.youtoube.com Historia del numero 1.

LOS MEDIOS

PASO 3. Dejar, en poder de cada uno de losniños y niñas, una sola unidad y entregar a cada uno, ahora tres partes iguales entre sí, cada una de esas partes corresponde a la mitad de la unidad de referencia. Se pide al niño "recubrir" la unidad con esas partes.

Serán ellos mismos quienes descubran que se requieren exactamente dos de esas partes congruentes para recubrir la unidad.
Se les pide describir, con sus palabras, su descubrimiento guiando el proceso de verbalización de una acción concreta (manipulación de la unidad y de las partes) hacia la conceptualización.

Mediador M - *¿Cuántas de esas partes congruentes se necesitaron para construir la unidad?*

Estudiante E - *Para cubrir toda unidad se utilizaron dos partes*

M - *¿Qué representa cada una de esas partes iguales?*

E - *La mitad de la unidad.*

El mediador se encargará, entonces, de conducir al estudiante hacia la siguiente conclusión:

- *cada una de las partes, que es la mitad de una unidad, se puede llamar también "un medio"*
- *cada unidad tiene dos mitades, es decir, dos medios son una unidad.*

PASO 4. Entregue a niños y niñas un círculo de papel, para que seanellos mismos quienes ahora lo dividan en dos partes iguales doblándolo exactamente por la mitad, esto se puede hacer con absoluta precisión pues al hacer doblez las partes se superponen hasta hacerlas coincidir; y se logra así el redescubrimiento de las mitades.

Se sugiere, también, el uso de unidades rectangulares hechas en papel cuadriculado de 24 por 12 cuadritos, son guías (la cuadrícula) y dimensiones que facilitarán el reparto.

PASO 5. Viene ahora el proceso de la escritura y de la simbolización

Escribiremos:

- El círculo se dividió en dos partes congruentes, es decir, una unidad se dividió en dos partes iguales.
- Cada una de esas partes, que es medio círculo, es la mitad de la unidad.
- Llamaremos “un medio” a esa mitad y lo escribiremos así: $\frac{1}{2}$

(a la vez, se puede conducir a la visualización, de la razón a través de la expresión “Se ha elegido una sola de las dos partes que tiene la unidad” *(uno de dos*)

La mitad de la unidad esun medio; lo simbolizamos así: $\frac{1}{2}$

Dos mitades,constituyen la unidad (1). Dos medios $\frac{2}{2}$ representan la unidad.

$$\frac{2}{2} = 1$$

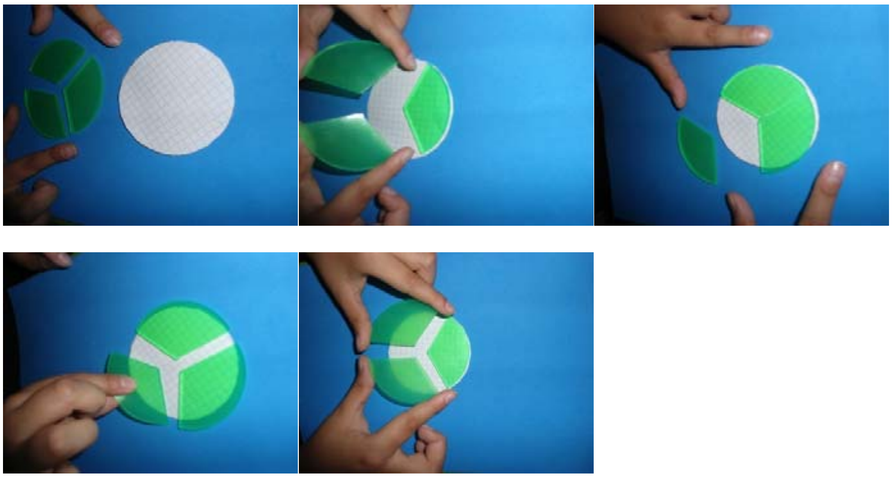
LOS TERCIOS

Se continúa con esta actividad, pero empleando ahora tercios, siguiendo el mismo proceso anterior.

PASO 1. Entregar a cada uno de los niños y niñas un círculo.

PASO 2. Entregar ahora tres partes iguales. Ellos pueden superponerlas para verificar que coinciden, es decir, que son congruentes. Cada una de esas partes corresponde a un tercio de la unidad de referencia, que es en este caso un círculo. Se pide al niño “recubrir” la unidad con esas partes.

Ellos mismos “descubrirán” que con esas tres partes congruentes se puede recubrir toda la unidad.



Se le pide describir, con sus palabras, su descubrimiento guiando el proceso de verbalización de una acción concreta (manipulación de la unidad y de las partes) hacia la conceptualización.

M- *Describe esta actividad de manera similar a la anterior.*

E- *Para cubrir toda unidad utilicé las tres partes congruentes.*

M- *¿Qué representa, con relación a la unidad, cada una de esas partes iguales?*

E- *La tercera parte de esa unidad.*

El mediador se encargará, entonces, de conducir al estudiante hacia la siguiente conclusión:

- *cada una de las partes, que es la tercera parte de una unidad, se llama “un tercio”*
- *Tres tercios constituyen la unidad.*

PASO 3. Se recomienda entregar un rectángulo de papel ya que esta figura, a diferencia del círculo, facilita la división en tres partes congruentes. Serán los mismos, niños y niñas, quienes realicen la acción, haciendo dos dobleces de manera que las tres partes que éstos determinan, a través de la superposición, sean exactamente iguales y con esta práctica, hagan el redescubrimiento de los tercios.

PASO 4. Viene ahora el proceso de la escritura y de la simbolización

Escribiremos:

- Se puede dividir una unidad en tres partes iguales.
- Llamaremos "un tercio" a cada una de esas partes y lo escribiremos así: $\frac{1}{3}$ (a la vez, se puede conducir a la visualización de la razón a través de la expresión, "Se elige una de las tres partes que tiene la unidad" uno de tres, en asociación con el concepto de razón)

La tercera parte de la unidad es un tercio: $\frac{1}{3}$ (en este caso, del círculo y del rectángulo que son, en esta práctica, nuestras unidades de referencia)

Tres tercios son la unidad $\frac{3}{3} = 1$

LOS CUARTOS

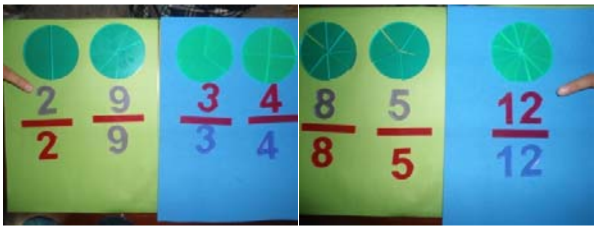
Se continúa con esta actividad, pero empleando ahora cuartos, emulando el proceso anterior. Se sugiere utilizar los rectángulos y los círculos de papel haciendo los dobleces, pues para este efecto las dos formas permiten la exactitud.

CONCLUSIÓN

Se espera entonces alcanzar siguiente conclusión:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \cdots = \frac{n}{n} \quad [1]$$

Serán los mismos niños y niñas quienes, con el acompañamiento del docente mediador, “descubran” (aún desde lo concreto) la equivalencia [1]



UN PROBLEMA QUE REQUIERE DE TU INGENIO

Hugo, Paco y Luis deben repartirse todala limonada que contiene la jarra, pero sólo tienen los envases que muestra la gráfica. ¿Cómo lo harías tú para que cada uno tome la misma cantidad de limonada, es decir, para que cada uno tome exactamente un tercio del líquido?

3.3 Fracciones que representan más que una unidad

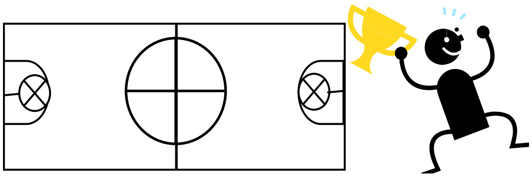
Estas son las fracciones impropias —

Se utilizarán las fracciones para simbolizar representaciones de unidades completas (como se estudió al inicio de la propuesta de intervención) y algunas porciones de ésta, que surgen en la cotidianidad en contextos como:

Gran Competencia de atletismo para niños entre 9 y 11 años.

Recorrido total de la prueba:

Tres vueltas y media a la cancha de basquetbol



Partimos de representaciones con el material del que disponemos.

SESIÓN 1.

PASO 1. Entregaremos ahora hasta tres unidades y de una caja que contiene mitades; se le pedirá que cubra cada una de esas unidades

M- ¿Cuántos medios de la unidad de referencia se necesitan? para cubrir:

- Una unidad
- Dos unidades
- Tres unidades...

PASO 2. Entregaremos ahora hasta cinco unidades (círculos y rectángulos) hechas en papel y se pedirá a niños y niñas que dividan en medios cada una de esas unidades y se propondrá la misma actividad del PASO 1, con la intención de afianzar el concepto, siendo cada uno de los niños y niñas quienes ejecutan la acción de fraccionar la unidad en partes congruentes:

Cuatro medios — de la unidad de referencia son dos unidades: —

Seis medios — de la unidad de referencia
son tres unidades:

—

Se espera que de aquí en adelante, sean los niños y niñas quienes, naturalmente, se encarguen de llevar a un nivel más alto su concepto: de lo concreto a lo abstracto: seis, siete, diez, quince unidades equivalen a doce medios, catorce medios, veinte medios, treinta medios…

Si entonces son – —

Entonces se verá claramente que si se toman *m* unidades, éstas se representarán, en medios, como el doble de esa cantidad “sobre” 2 (se recomienda usar naturalmente en el lenguaje verbal la expresión “*p sobre q”*)

PASO 3. Reconstruir con cinco medios, las unidades que se alcance y hacer la descripción del hallazgo.

De donde se concluye:

Con cinco medios — se cubren dos unidades y media. Se simboliza así: — —

Se proponen actividades similares para representar y simbolizar números de la forma $\frac{2\,n+1}{2} = n + \frac{1}{2}$

Así mismo, el docente mediador se encargará de desarrollar el proceso inverso, es decir, traer unidades completas, sin dividir, y algunas porciones (medios, tercios, cuartos o quintos…)

…para contar por ejemplo tres unidades y tres cuartos: $3 + \frac{3}{4}$.

se divide cada una de las tres unidades en cuartos, se obtienen así doce cuartos.

Se cuentan entonces los cuartos obtenidos: hay quince cuartos:

$$3 + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4}\,, \quad es\ decir, \quad 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

PASO 4. Entregar ahora cinco unidades y de una caja que contiene tercios de las unidades de referencia y se pedirá a niños y niñas que cubran cada una de esas unidades.

M- ¿Cuántos tercios se necesitan? para cubrir:

- Una unidad
- Dos unidades
- Tres unidades...

Y se espera que de ahí en adelante, seanlos niños y niñas quienes, naturalmente, se encarguen de llevar a un nivel más alto su concepto, de lo concreto a lo abstracto: seis, siete, diez, quince unidades equivalen a dieciocho tercios, veintiún tercios, treinta tercios, cuarenta y cinco tercios…

Seis tercios — de la unidad de referencia son dos unidades:

—

Nueve tercios — de la unidad de referencia son tres unidades:—

Si

son : –, entonces, —

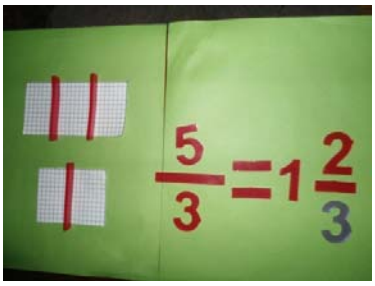
Se verá claramente que si se toman *m* unidades, éstas se representarán, en tercios, como el triple de esa cantidad "sobre" 3 (se recomienda usar naturalmente en el lenguaje verbal la expresión *"p sobre q"*)

PASO 5. Ahora el proceso en donde, son precisamente, los niños y niñas quienescon unidades completas (rectangulares) elaboradas en papel cuadriculadohacen los dobleces.

Se entregan una unidad completa y dos tercios de esa unidad: —

Se hacen ahora dos dobleces en la unidad completa para dividirla en tercios.

Se cuenta el total de tercios que se tienen: — — —



Se concluye:

Cinco tercios — de la unidad de referencia representanuna unidad completa y dos tercios. Se simboliza así: — —

Se proponen actividades similares para representar y simbolizar números de la forma ——— —

La creatividad e ingenio delos estudiantes, permitirá hacer representaciones y simbolizaciones similares.

SESIÓN 2. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

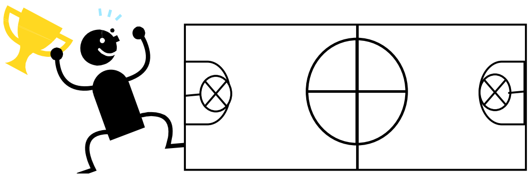
PROBLEMA 1.

Se sugiere la discusión, representación, práctica (en una cancha de basquetbol) y análisis de la situación planteada al inicio de esta actividad

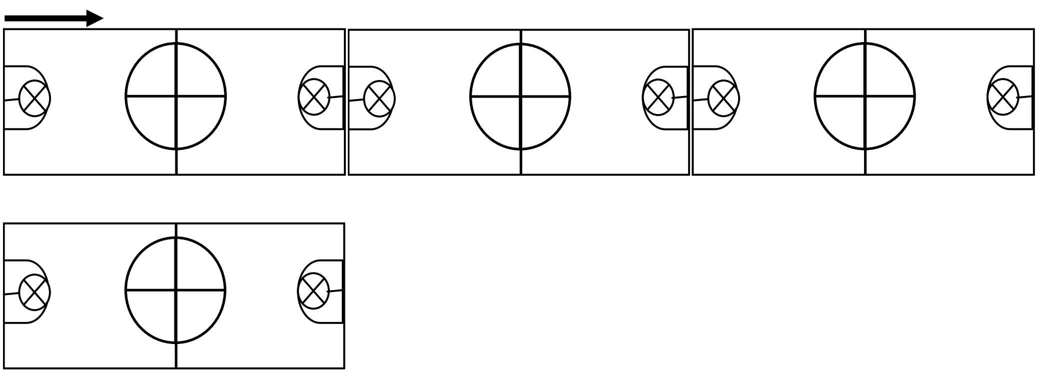
Gran Competencia de atletismo para niños entre 9 y 11 años.

Recorrido total de la prueba:

Tres vueltas y media a la cancha de basquetbol

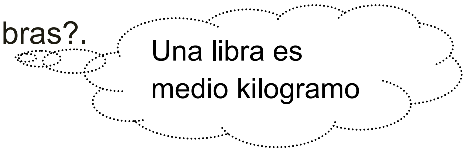


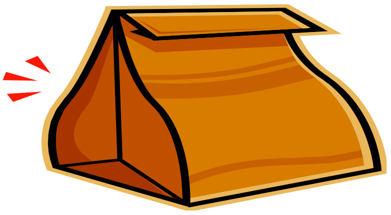
Escribe aquí el análisis que hicieron con los compañeros.



PROBLEMA 2.

¿Cuántos kilogramos de arroz hay en un empaque de 5 libras?.





ARROZ

Escribe aquí tu respuesta

PROBLEMA 3.

Para preparar un vaso de limonada se requieren 3 cucharadas de concentrado. ¿Cuántos vasos de limonada con la misma concentración podrás preparar si hay 5 cucharadas de concentrado?

3.4 Relación de Equivalencia. Relación de Orden.

I. Relación de Equivalencia.

Se trata, ahora, de evidenciar la relación de equivalencia entre fracciones (menores que la unidad) con distinto denominador.

PASO 1. Trabajar con:

- Dos unidades (pueden ser los círculos o los rectángulos),
- Un medio de la unidad de referencia
- Dos cuartos de la unidad de referencia.

Sepide cubrir,con estos trozos, la parte de la unidad que se pueda:

Sobre una de las unidades se colocará un medio ysobre la otra unidad, los dos cuartos

Se compara un medio con dos cuartos. Se espera que seanlos mismos estudiantes quienes "descubran" que las porciones recubiertas son exactamente iguales.

Se habla aquí de porciones congruentes.

El docente mediador debe conducir a la siguiente conclusión *"decimos entonces que un medio y dos cuartos son equivalentes"*, es decir, representan lo mismo aunque su escritura sea diferente. Lo que se inicia, a través de este proceso es la conceptualización de la equivalencia de las fracciones con estatus de número racional.

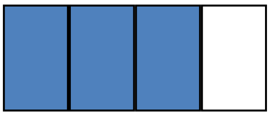
Niños y niñas evidenciarán, que se cubre exactamente la misma parte de la unidad con un medio que con dos cuartos.

El docente mediador acompañará el proceso para describir la equivalencia:

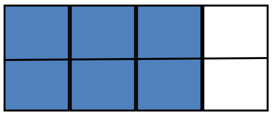
$\frac{1}{2}$ *esequivalentecon* $\frac{2}{4}$; *se simboliza así* : $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$ y ocurre que

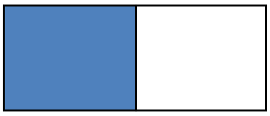
$$1 \times 4 = 2 \times 2$$

Ejemplos utilizando los rectángulos de papel:

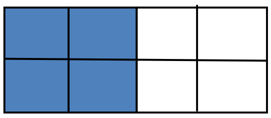


$\frac{3}{4} \sim \frac{6}{8}$ $(3 \times 8 = 4 \times 6)$

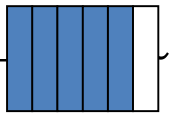


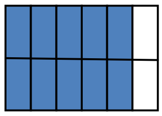


$\frac{1}{2} \sim \frac{4}{8}$ $(1 \times 8 = 2 \times 4)$



$5 \times 12 = 6 \times 5$ $\frac{5}{6}$



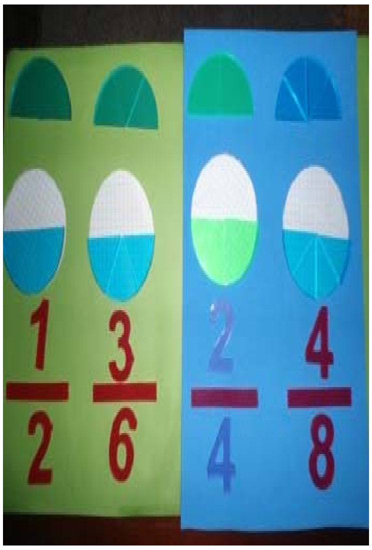


En general,

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ porque $1 \times 4 = 2 \times 2$ inicio de la conceptualización

Las fracciones representan la misma porción aunque se escriben diferente. Pertenecen a la misma clase de equivalencia $\left[\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

PASO 2. Se sugiere al docente mediador, proponer otras equivalencias, utilizando los rectángulos de papel y el material prediseñado.



Por ejemplo:

- — — ;
  —— ——
- — —;
  —— ——

Y por esta vía, establecer la equivalencia

entrelas fracciones — — — —

Se evidencia entonces que
— — — — son
elementos de la clase de
equivalencia cuyo representante
canónico es—

Desarrollar actividades similares aprovechando las múltiples opciones que se tienen con el material del que se dispone y, sin duda, con la creatividad e ingenio de los niños y niñas.

Se puede complementar esta práctica con algunos comentarios sobre el tema encontrados en http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/fracciones-equivalentes.html

Fracciones Equivalentes

Las Fracciones Equivalentes tienen el mismo valor, aunque parezcan diferentes.

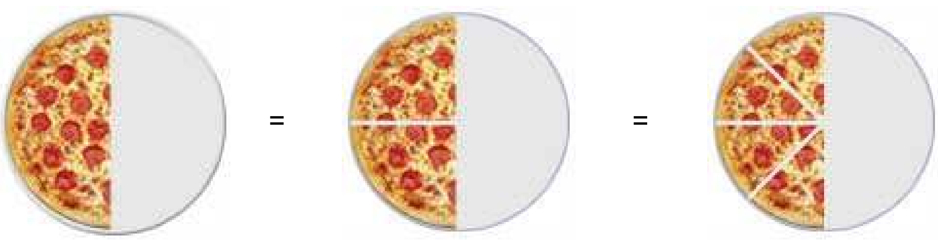
Estas fracciones son en realidad lo mismo: — — —¿Por qué son lo mismo?Porque cuando multiplicas o dividesa la vez arriba y abajo por el mismo número, la fracción mantiene su valor. La regla a recordar es:¡Lo que haces a la parte de arriba de la fracción también lo tienes que hacer a la parte de abajo!

Por eso, estas fracciones son en realidad la misma:

$$\frac{1}{2} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{2}{4} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{4}{8}$$

Y en un dibujo se ve así:

$^{1}/_{2}$ $^{2}/_{4}$ $^{4}/_{8}$



Aquí hay más fracciones equivalentes, esta vez dividiendo:

$$\frac{18}{36} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{6}{12} \underset{\div 6}{\overset{\div 6}{=}} \frac{1}{2}$$

Si seguimos dividiendo hasta que no podamos más, habremos simplificado la fracción (la hemos hecho la más simple posible).

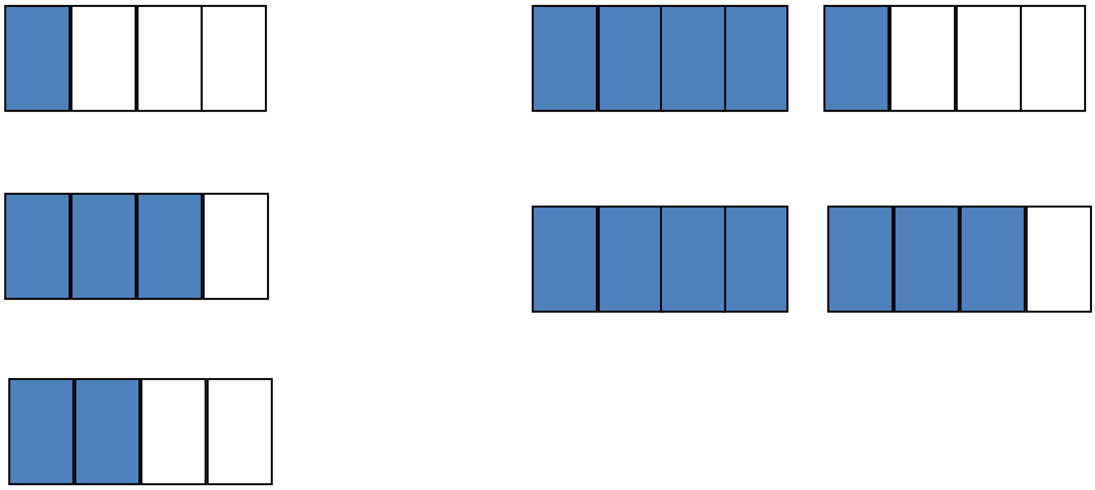
Importante:

- Las operaciones que podemos hacer son multiplicar y dividir (siempre las dos partes a la vez). Si sumamos o restamos un número arriba y abajo, no tendremos una fracción equivalente.
- El número que elijas para dividir las dos partes no debe dejar ningún resto en las divisiones.

II. Relación de Orden

PARTE 1. Utilizando fracciones con igual denominador, aquí claramente se apelará al orden que ya los niños y niñas tienen establecido en los números naturales.

Por ejemplo, el docente mediador puede utilizar — — — — — y pedir que se ordenen de menor a mayor.



PARTE 2. Utilizando fracciones con numerador 1 y distinto denominador, se comparará el tamaño de los trozos.Por ejemplo, superponiendo trozos que representan un medio, un tercio, un cuarto, un quinto, etc. de una misma unidad de referencia. Aquí se compara el tamaño de los trozos y se pide al niño que los ordene libremente, de menor a mayor o de mayor a menor.

A través de la relación de equivalencia, se puede evidenciar, con mayor comodidad este hecho: $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$, y de acuerdo con lo que estudiamos en la PARTE 1 se tiene que $\frac{1}{4} < \frac{2}{4}$.

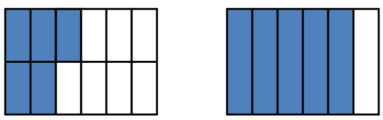
Se evita, así, que los niños y niñas caigan en errores como $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ puesto que $2 < 4$.

Se sugiere al docente mediador, traer otros elementos que le permitan evidenciar situaciones como la que se describe.

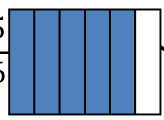
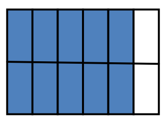
PARTE 3.

Utilicemos ahora fracciones con el mismo numerador, no necesariamente 1 como en la PARTE 2, y con distinto denominador.

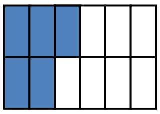
Establezcamos, por ejemplo, el orden entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{5}{12}$. Nuevamente estamos comparando el tamaño de las partes, ya sabemos que si dividimos una unidad en doce partes congruentes, cada una de éstas partes es más pequeña que cada una de las partes que resultan si dividimos esa misma unidad en seis partes congruentes; por lo tanto la relación de orden que se puede establecer entre esas dos fracciones es $\frac{5}{12} < \frac{5}{6}$

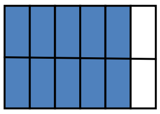


Si recurrimos a la relación de equivalencia tenemos:

 $5 \times 12 = 6 \times 5$ $\frac{5}{6}$  $\sim$ 

Claramente, $\frac{5}{12} < \frac{10}{12}$





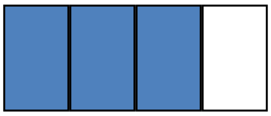
PARTE 4.

Compararemos ahora fracciones con distinto numerador y distinto denominador, para ello recurrimos a la relación de equivalencia.

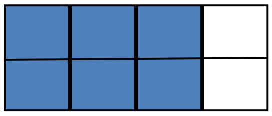
Veamos un ejemplo:

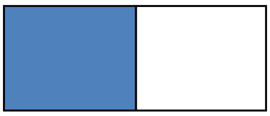
Ordenemos de menor a mayor las fracciones $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$.

Como en este caso 8 es múltiplo de 2, 4 y 8, llevamos todas las fracciones a fracciones equivalentes con denominador 8. Veamos:

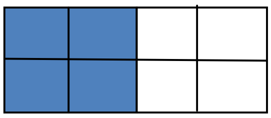


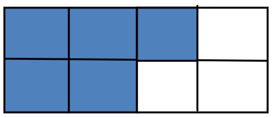
$$\frac{3}{4} \sim \frac{6}{8} \quad (3 \times 8 = 4 \times 6)$$





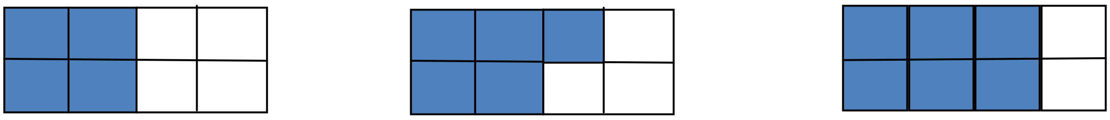
$$\frac{1}{2} \sim \frac{4}{8} \quad (1 \times 8 = 2 \times 4)$$



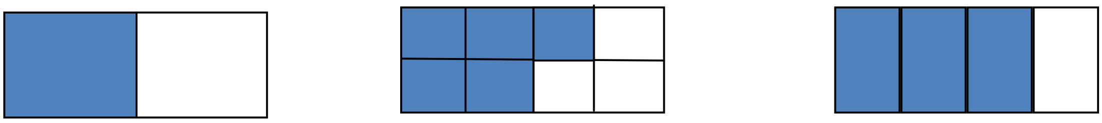


$$\frac{5}{8}$$

Y ahora las ordenamos de menor a mayor: $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$



$$\frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8}$$



$$\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$$

Las gráficas muestran claramente la diferencia de tamaño entre las representaciones de las fracciones como partes de un mismo todo y la validez del ordenamiento, sin embargo, hagamos el siguiente análisis:

$\frac{1}{2} < \frac{5}{8}$ y ocurre que $1 \times 8 < 2 \times 5$

$\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$ y ocurre que $5 \times 4 < 8 \times 3$

A su vez

$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ y ocurre que $1 \times 4 < 2 \times 3$

En consecuencia, el ordenamiento, de menor a mayor es $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}$

Adición de fracciones con igual denominador

SESIÓN 1

Se propone reconstruir la unidad.

PASO 1. Con quintos. Se utilizará el material prediseñado.

Entregar a cada uno de los niños y niñas, dos quintos, a la vez escribir $\frac{2}{5}$.

Entregar ahora tres quintos, pedirles que los ubiquen junto a las porciones iniciales, de modo que quede "armada" la unidad, escribir, ahora, en el espacio destinado $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5}$

Se sugiere al docente mediador, proponer esta misma reconstrucción con $\frac{4}{5}\, y\, \frac{1}{5}$

PASO 2. Con séptimos, con octavos, etc…

Se recomienda, a manera de aprestamiento, iniciar con sólo dos sumandos.

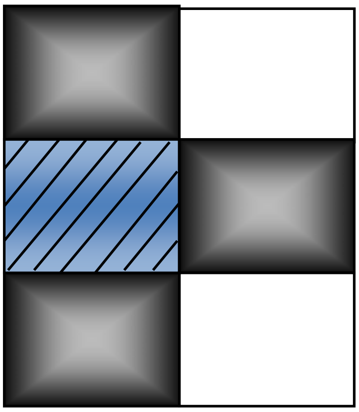
Una vez que se haya logrado cierta familiaridad, se sugiere desarrollar la actividad, encaminada a la reconstrucción de la unidad, con más de dos sumandos siempre que sea posible.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

PROBLEMA 1.

Adición de fracciones con igual denominador, para reconstruir la unidad.

Juan Manuel quiere alfombrar el piso de su oficina con seis tapetes del mismo tamaño como se puede ver en la figura.



Vamos completar:

- Tres de los seis tapetes son negros.
  Se puede representar con la fracción —
- Uno de los seis tapetes es de rayas.
  Se puede representar con la fracción —
- Faltan aún dos de los seis tapetes.
  Se puede representar con la fracción —
- Si sumo las fracciones, obtengo el total del piso que se quiere alfombrar.

— + — + — = —

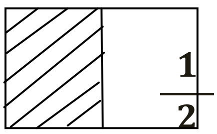
PROBLEMA 2. LA ENCUESTA

Este problema sugiere la adición de fracciones con diferente denominador para reconstruir la unidad.

El docente mediador debe guiar la acción utilizando la equivalencia de fracciones (hasta llevar todas las fracciones al mismo denominador) con la ayuda de una gráfica.

Una encuesta realizada en un curso se hizo de la siguiente manera:

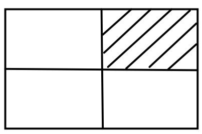
Antes del descanso se entrevistó a la mitad de los estudiantes del curso



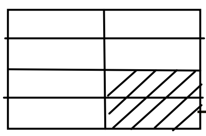
$\frac{1}{2}$

Durante el descanso, se entrevistó a la cuarta parte del total del curso

$\frac{1}{4}$



Después del descanso se entrevistó a los dos octavos del total del curso



$\frac{2}{8}$

¿Qué parte del total de los estudiantes del curso falta por entrevistar?

PROBLEMA 3. LOS REFRIGERIOS

Pedro, Iván y Elías tienen 30 minutos para descargar el camión de los refrigerios.

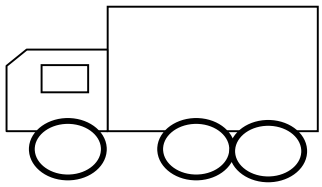
Durante los treinta minutos:

Pedro baja los dos sextos $\left(\frac{2}{6}\right)$del total de refrigerios.

Iván puede bajar la cuarta parte $\left(\frac{1}{4}\right)$del total de los refrigerios

Elías baja la tercera parte $\left(\frac{1}{3}\right)$ del total de los refrigerios

REFRIGERIOS



Pregunta 1. Qué parte del total de refrigerios han bajado entre Iván y Elías?

Pregunta 2. Qué parte del total de refrigerios han bajado entre Pedro e Iván?

Pregunta 3. Qué parte del total de refrigerios han bajado entre Pedro y Elías?

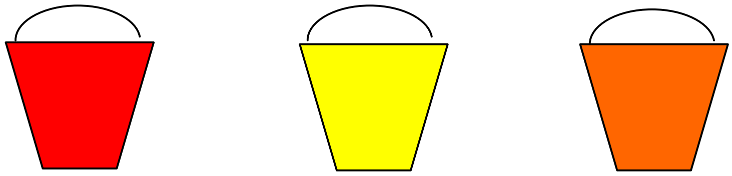
Pregunta 4. Qué parte del total de refrigerios han bajado entre los tres?

Pregunta 5. Pudieron desocupar todo el camión durante esos treinta minutos?

PROBLEMA 4. Latas de pintura

Andrés y Mariana hacen un mural para su colegio.

Para preparar pintura de color naranja deben mezclar tres quintos de una lata de pintura roja con tresdécimos de una lata de pintura amarilla.



Pregunta:

Qué parte de una lata de pintura contiene la lata en la que Andrés y Mariana hicieron la mezcla para obtener la pintura de color naranja?

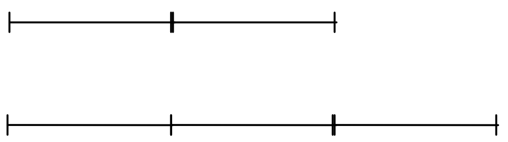
Dela Razón a la Fracción

PROBLEMA 1

Vamos a observar los segmentos para establecer la razón entre sus longitudes:

Esta será nuestra unidad de longitud

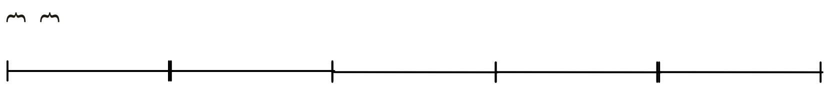
Ahora los segmentos que vamos a observa:



La razón entre las longitudes de estos segmentos es $2:3$

Pongamos ahora un segmento a continuación del otro y construyamos así un segmento de longitud 5

$$\frac{2}{5}\ \frac{3}{5}$$

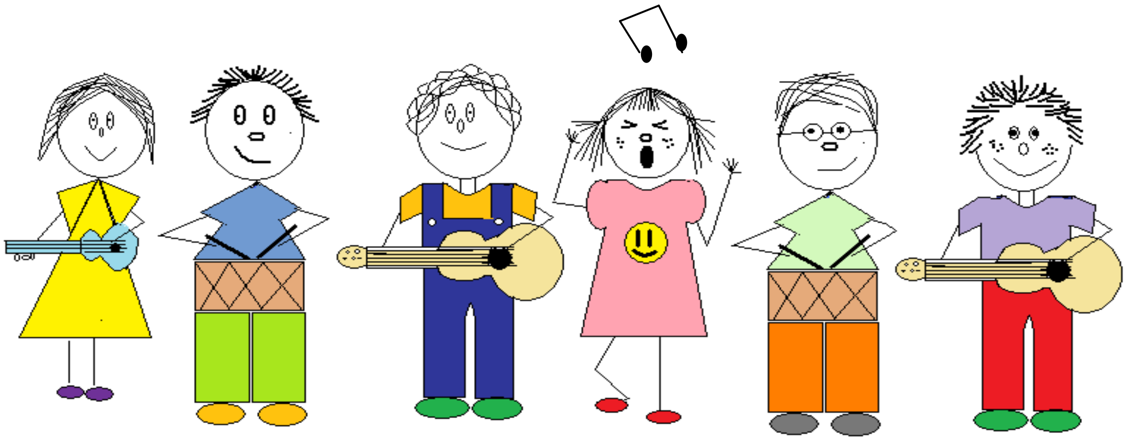


Y tenemos entonces que

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

PROBLEMA 2

La imagen (las caricaturas se dibujaron en el tablero, y, así mismo los niños y niñas las dibujaron en sus cuadernos) muestra seis estudiantes que pertenecen al grupo musical del colegio, se aclaró que aeste grupo pertenecen más estudiantes del colegio, pero sólo se quiere hablar de estos seis.



Ani	Javier	Juancho	Paola	Camilo	Pacho
10 años	11 años	12 años	11 años	11 años	11 años

El inicio de la actividad motivó al grupo, cada uno hizo su mejor esfuerzo paradibujar la mejor caricatura, se hicieron chistes y se identificaron con los personajes. A la vez se oyeron comentarios referentes a la cantidad:

"Una sola canta, esos dos tocan guitarra, y una niña también, y, dos tocan tambor…"

El docente mediador intercambió ideas con los estudiantes y dirigió la siguiente actividad, vamos a escribir razones y fracciones:

1. LAS RAZONES

   Vamos a escribir las razones que corresponden a

$$Cantidad\ de\ estudiantes\ que\ cantan : total\ de\ estudiantes\ que\ tocan\ guitarra$$

$$La\ razón\ \ es \quad 1 : 3$$

Se escribieron otras razones:

$$Cantidad\ de\ estudiantes\ que\ cantan : cantidad\ de\ estudiantes\ que\ tocan\ flauta$$

$$La\ razón\ es \quad 1 : 0$$

Propuso también otras razones con el propósito de que el estudiante clarificara cuáles eran las cualidades y las cantidades que ellas relacionaban.

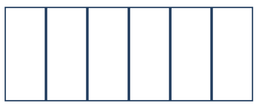
Por ejemplo,

La razón $4 : 2$ relaciona la cantidad de estudiantes que tienen 11 años con la cantidad de estudiantes que no tienen 11 años.

La razón $4 : 2$ también relaciona la cantidad de niños con la cantidad de niñas del grupo.

2. LAS FRACCIONES

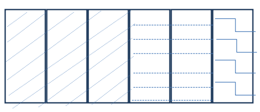
El docente mediador propuso hacer una representación del grupo así:



Podemos decir que el grupo es una unidad (un todo), y como son seis los estudiantes que observamos, dividimos esta unidad en seis partes iguales, cada una de ellas es la sexta parte de la unidad, es decir, un sexto $\left(\frac{1}{6}\right)$, entonces todo el grupo, o sea la unidad, son seis sextos $\left(\frac{6}{6}\right)$

Vamos ahora a sombrear teniendo en cuenta la actividad que desarrollan los estudiantes dentro del grupo:

guitarra tambor ***canto***

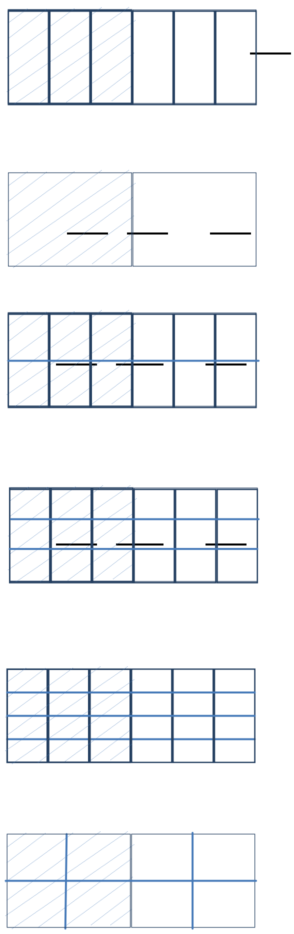


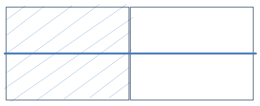
- Los estudiantes que tocan la guitarra son tres, ellos representan los tres sextos de la unidad… —
- Los estudiantes que tocan tambor son dos, ellos representan los dos sextos de la unidad… —
- Hay sólo una estudiante que canta, ella representa la sexta parte de la unidad… —

Se lleva a los estudiantes a la reconstrucción de la unidad — — — —

3. LAS EQUIVALENCIAS

El docente mediador propuso establecer equivalencias:





El docente mediador propuso además, por esta misma vía, equivalencias entre

— — , y fracciones de la forma —

Uno de los estudiantes planteó lo siguiente:

“Profe, pero no es lo mismo, tener tres estudiantes de seis que tener un estudiante de dos”

Esta observación del estudiante evidencia que entre los niños y niñas de este nivel de escolaridad prima el pensamiento concreto. El docente se puede valer de ello para incursionar nuevamente en el trabajo alrededor de la equivalencia de fracciones, lo cual proveeelementos valiosos en el proceso de la conceptualización. Por esta vía se puede iniciar la instauración de la fracción como número.

Se sugiere plantear otras fracciones que muestren, por ejemplo:

- La cantidad de niñas y el total del grupo, la cantidad de niños y el total del grupo.
- La cantidad de estudiantes cuyo nombre empieza por P y el total del grupo.

Teniendo cuidado de implementar una sola cualidad con el propósito de hablar siempre de un mismotodo cuando se pretende hacer la reconstrucción de la unidad a través de la adición.

4. ORDEN

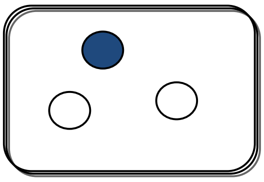
Ordena, de menor a mayor las fracciones que representan, con respecto al grupo de seis estudiantes, quienes cantan, quienes tocan guitarra y quienes tocan tambor.

Fracción que representa los estudiantes que cantan…

Fracción que representa los estudiantes que tocan guitarra…

Fracción que representa los estudiantes que tocan tambor…

PROBLEMA 3.



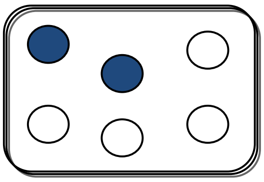
1. Escribe la razón entre los puntos azules y los puntos azulesy los puntos blancos

2. Escribe la razón entre los puntos azules y los puntos blancos y los puntos azules

3. ¿Cuántos puntos hay en total?

4. Escribe las fracciones que describen la parte del conjunto que:
   a. Representan los puntos blancos

   b. Representan los puntos azules



Desarrolla la misma actividad con este nuevo conjunto

¿Puedes establecer la equivalencia de las fracciones de la parte 1 y la parte 2 de esta actividad?.

Bibliografía

[1] ACEVEDO C, Myriam. HUERTAS C, Crescencio. Cuadernos de Matemática Educativa. Una mirada a la Aritmética de la escuela. Grupo Editorial GAIA. 1999.

[2] ACEVEDO C, Myriam, otros. Fundamentación Conceptual Área de Matemáticas. ICFES. Mayo de 2007.

[3] DE ZUBIRÍA SAMPER, Julián. Hacia una pedagogía Dialogante, el modelo pedagógico del Merani. Seminario de Modelos Pedagógicos. Cali. Noviembre de 2008.

[4] DEWEY John. Experiencia y Educación. Madrid. 2004 p 126

[5] FLORES Gil, Francisco Luis. Historia y Didáctica de los Números racionales e Irracionales. Publicatuslibros.com. 2008.

[6] FEUERSTEIN, R. Modificabilidad Cognitiva y Programa de Enriquecimiento Instrumental. Manual para el alumno y el docente. Madrid:Instituto Superior Pío X. 1993.

[7] GAIRIN, José María. Números Racionales Positivos: Reflexiones sobre la Instrucción. Ediciones Universidad de Salamanca. Aula, 10, 1998, pp 41-64.

[8] GODINO Juan D. Matemáticas para Maestros. Proyecto *Edumat-Maestros.* Universidad de Granada. 2004

[9] GRANADA Andrés y TIRADO Luz Adriana. Pedagogía Conceptual. 2004

[10] NEWMAN, James R. Colección SIGMA EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS. Ediciones Grijalbo. Octava edición. Barcelona. 1980.

[11] RAMIREZ, Margarita; BLOCK, David. La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. Educación Matemática, vol. 21, núm. 1, abril, 2009, pp. 63-90 Santillana. Distrito Federal, México. 2009.

[12] SANCHEZ B, Clara Helena. Material para la materia Introducción a la Filosofía e Historia de la Matemática. Semestre II. 2010.

EN LÍNEA

Aparecen situados al pie de página o intercalados en el texto.